

THÈSES

présentées

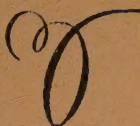
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR - INGENIEUR

par

PAUL - DOSGHEAS



1^{ère} THESE : Influence de l'effet gyroscopique sur
la stabilité des rotors.

2^{ème} THESE : *Propositions données par la Faculté.*

Soutenues le 25 juin 1964 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU

M. RAVILLY

M. VIVIER

Président

} Examinateurs

THÈSES

présentées

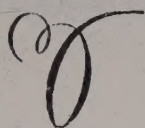
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR - INGENIEUR

par

PAUL - DOSGHEAS



1^{ère} THESE : Influence de l'effet gyroscopique sur
la stabilité des rotors.

2^{ème} THESE : *Propositions données par la Faculté .*

Soutenues le 25 juin 1964 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU
M. RAVILLY
M. VIVIER

Président

} *Examineurs*

UNIVERSITE de NANTES

FACULTE des SCIENCES

Doyen M. BRILLOUET

Assesseur M. PIRONNEAU

Professeurs Titulaires	MM. BRILLOUET	Mathématiques
	PAUC	"
	PETRESCU	"
	PIRONNEAU	Mécanique
	RAVILLY	"
	BOULLLOUD	Physique
	COLLET	"
	DUNOYER	Chimie
	GRAFF	"
	VAUGIEN	Biologie Animale
	GARRIGUES	Biologie Végétale
	Mlle DEBRAUX	" "
	M. GOURINARD	Géologie

Professeurs et Maîtres de Conférences	MMMOLINARO	Mathématiques
	VIVIER	"
	BALQUET	Mécanique
	AVIGNON	Physique
	GOUREAUX	"
	LASKAR	"
	LERMUSIAUX	"
	MEZENECV	"
	MINN	"
	MOUTON	"
	JOLIVET	Chimie
	GOBIN	"
	QUINIOU	"
	ROUXEL	"
	WOJTKOWIAK	"
	PIERI	Biologie Animale
	SELLIER	" "
	OTTMANN	Géologie

Secrétaire : M. PAILLET

Ce travail a été effectué au laboratoire de Mécanique des Structures de M. le Professeur PIRONNEAU, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, à qui j'adresse respectueusement mes remerciements.

Tout au long de cette étude, M. le Professeur PIRONNEAU m'a encouragé et guidé constamment, tant sur le plan théorique qu'expérimental et c'est grâce à son aide et à sa surveillance bienveillante que cette thèse a pu être réalisée. Je lui en exprime ma profonde gratitude.

Que tous ceux qui ont participé à ce travail, notamment au laboratoire d'Electrotechnique et à l'atelier de Mécanique, reçoivent mes remerciements et, en particulier, M. S. Pierre-Hervouet pour la conscience et l'habileté avec lesquelles il m'a aidé dans la réalisation expérimentale et les mesures .

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Chapitre I - COUPLAGE - FLEXION - TORSION

I - 1	Système à 2 degrés de liberté - Fréquences propres	1
I - 2	Variations des fréquences propres en fonction de l'une des inerties	2
I - 3	Variation des fréquences propres en fonction du couplage	4
I - 3 - 1	Sur la représentation précédente	4
I - 3 - 2	Sur l'équation générale	4
I - 4	Vérification expérimentale	5
I - 4 - 1	Etude théorique du système mécanique	5
I - 4 - 2	Détermination des coefficients a, b, c	6
I - 4 - 3	Calcul de la masse équivalente de la lame pour le premier mode de vibration	6
I - 4 - 4	Calcul de la masse équivalente de la lame pour le deuxième mode de vibration	7
I - 4 - 5	Calculs des valeurs théoriques pour le système considéré	7
I - 4 - 6	Application	9
I - 4 - 7	Valeurs expérimentales	9
I - 5	Conclusion	10

Chapitre II - COUPLAGE GYROSCOPIQUE - ETUDE GENERALE

II - 1	Mise en équation du mouvement du rotor	11
II - 1 - 1	Détermination des paramètres	11
II - 1 - 2	Expression de l'Energie Potentielle	12
II - 1 - 3	Expression de l'Energie Cinétique	12
II - 1 - 4	Equations du mouvement dans les axes mobiles	13
II - 2	Changement de repères	15
II - 2 - 1	Etude de la transformation	15
II - 2 - 2	Application de la Transformation	16
a)	Détermination de l'opérateur T	16
b)	Calcul des différents termes	18

II - 3	Mouvement d'un rotor parfait	20
II - 3 - 1	Détermination des équations	20
II - 3 - 2	Etude du mouvement libre	20
	A) Cas particulier $b = 0$	20
	B) Cas général	21
II - 3 - 3	Etude des oscillations forcées	23
II - 3 - 4	Action des forces tournantes, d'Intensité constante	24
II - 3 - 5	Excitation par Mouvement périodique du support	26
II - 4	Equation dans les axes liés au rotor	27

Chapitre III - FREQUENCES PROPRES DE VIBRATIONS D'UN ROTOR PARFAIT

III - 1	Etude théorique des solutions de l'équation (II,3,2,B)	29
III - 1 - 1	Etude de Y_1	29
III - 1 - 2	Etude des racines de $Y_1 \pm Y_2 = 0$	30
III - 2	Vérification expérimentale	33
III - 2 - 1	Calcul des fréquences propres de résonance en fonction de R	33
III - 2 - 2	Calcul des pentes des tangentes aux courbes $s_o = f(s)$	34
III - 3	Applications	35
III - 3 - 1	Disque 1	35
III - 3 - 2	Disque 2	36
III - 3 - 3	Disque 3	37
III - 3 - 4	Plaque rectangulaire	38
III - 4	Influence du couplage avec la table sur les fréquences propres statiques = système à 3 d° de liberté	39

Chapitre IV - APPAREIL EXPERIMENTAL

IV - 1	Montage mécanique	43
IV - 2	Technique et précision des mesures	43
IV - 2 - 1	Vitesse de rotation	43
IV - 2 - 2	Mouvement de l'arbre	44
IV - 2 - 3	Mouvement de la table-support	44

CONCLUSION

ANNEXES

Chapitre I - CALCULS NUMERIQUES - CALCULS d'ERREURS POUR l'ETUDE DU COUPLAGE FLEXION TORSION 51

I - 1	Calcul des masses	51
I - 2	Calcul des Inerties	52
I - 3	Calcul des coefficients de la matrice des raideurs	54
I - 4	Calcul des fréquences N_1 et N_2	54

Chapitre II - CALCULS d'ERREURS POUR l'ETUDE DU ROTOR PARFAIT 56

II - 1	Calcul des fréquences propres	56
II - 2	Calcul des tangentes au pt $N = N_1$ $n = 0$	58

Chapitre III - ETUDE NUMERIQUE DES EQUATIONS $Y_1 - Y_2 - Y_3$ 60 VALEURS EXPERIMENTALES

Figures et schémas	65
à	78

BIBLIOGRAPHIE	79
---------------	----

INTRODUCTION

Le problème du fouettement des arbres a été étudié de façon systématique depuis une vingtaine d'années, et des travaux théoriques et pratiques ont encore été publiés récemment.

Dès 1927, l'existence de différentes vitesses pour lesquelles les arbres en rotation présentent une instabilité, a été signalée par SMITH¹, mais si la Mécanique Rationnelle classique a permis d'expliquer, par exemple, les résonances se produisant à la moitié de la vitesse critique ω_c correspondant à la fréquence propre de vibration en flexion, elle semble impuissante à justifier le « fouettement » naissant au double de cette vitesse critique ω_c .

La forme des paliers et la lubrification sont apparues jusqu'à maintenant comme les facteurs primordiaux intervenant dans l'apparition du phénomène. Une synthèse de l'ensemble des travaux théoriques et expérimentaux poursuivis à partir de la Mécanique des Fluides et des théories du coin d'huile a été faite par YUKO HORI qui donne une explication valable de l'ensemble des phénomènes observés au cours de ces dernières années.

Tous ces travaux concernent essentiellement des arbres portés par des paliers à coussinets, et lubrifiés. Or, l'instabilité pour une vitesse de rotation $\omega = 2 \omega_c$ apparaît également pour des arbres supportés par des paliers à roulements à billes; et pour un même arbre, le phénomène existe, pour des paliers lisses ou à roulements, et se présente sensiblement pour la même vitesse.

Des explications plausibles ont été données par DEN HARTOG (hystérésis interne, effet de bord) et YAMAMOTO (influence des inégalités des billes du roulement), mais elles ne localisent pas le fouettement à la fréquence double de ω_c , avec sa caractéristique : toumoieusement du rotor à une vitesse moitié de la vitesse de rotation, sauf dans certains cas particuliers.

A la suite de toutes ces recherches et observations, il semble que l'on puisse penser que le phénomène peut être lié à des propriétés intrinsèques de l'ensemble rotor-arbre et, dans cette première étude, nous nous sommes intéressé plus particulièrement aux phénomènes gyroscopiques.

SMITH avait analysé séparément : mouvement de translation et mouvement de rotation du centre du rotor dans le cas où ils ne sont pas couplés, et la liaison des deux dans le cas du couplage a été considérée comme une simple superposition des deux, ceci étant reconnu comme valable seulement pour des amplitudes faibles.

Toutes les études précédentes correspondaient à des cas particuliers. Pour préciser la nature du phénomène, nous avons utilisé la théorie développée par Y. PIRONNEAU, analysant le cas le plus général où toutes les variables sont couplées et importantes : un rotor à l'extrémité d'un arbre souple. La mise en équation la plus générale a été faite, et le problème linéarisé au deuxième ordre; tenant

compte à la fois du couplage « statique », en l'absence de rotation entre les 2 fréquences propres de flexion , et du couplage gyroscopique , elle nous donne le dédoublement des fréquences de résonance statique , le dédoublement de la plus basse ayant jusqu'à maintenant été seul considéré et étudié en particulier par ROCARD ; les solutions des équations pour le cas de l'arbre et rotor symétriques , expliquent le phénomène de rotation rétrograde signalé par DEN HARTOG.

La discussion de la stabilité ne nous donne pas de plage d'instabilité, mais des fréquences de résonance autour desquelles le système est stable , dans le cas de rotor et arbre symétriques, ces fréquences se déplaçant avec la vitesse de rotation . Dans le cas d'un rotor dissymétrique, la théorie prévoit une zone d'instabilité proche de la fréquence de résonance la plus basse .

La vérification expérimentale nous a d'abord conduit à une étude théorique et pratique du couplage entre les deux modes de flexion , qui fait que les inerties en rotation et flexion ne peuvent être considérées comme dépendant seulement des formes géométriques et masse du système . Nous avons déterminé expérimentalement les coefficients de couplage statique pour l'étude expérimentale en dynamique . Les résultats expérimentaux concordent de façon satisfaisante avec les solutions données par la théorie : stabilité pour les rotors symétriques sauf aux résonances , dédoublement et déplacement des fréquences de résonance avec la vitesse de rotation (effet gyroscopique) , et dans le cas des rotors dissymétriques , instabilité constatée dans la gamme de vitesses prévue par la théorie .

D'autre part , un montage arbre-rotor a été étudié et réalisé qui permet d'obtenir à volonté le fouettement , et sur lequel nous avons observé un certain nombre de résonances , autres que celles mises en évidence par PINKUS .

Chapitre I

COUPLAGE - FLEXION - TORSION

I,1 - Système à 2 degrés de liberté - Fréquences propres -

Considérons un système à 2 degrés de liberté x et y . Soient M_1 et M_2 les masses intervenant dans les déplacements x et y , a et c désignant les forces de rappel correspondant à un déplacement unité dans l'une et l'autre direction

$$\begin{aligned} F_1 &= a x \\ F_2 &= c y \end{aligned}$$

Si les mouvements sont indépendants, si le système est découplé, les deux équations du mouvement peuvent s'écrire, sous forme matricielle :

$$\begin{vmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'' \\ y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = 0$$

On a deux équations indépendantes.

Les 2 mouvements ne sont plus indépendants si une variation de x entraîne une variation de y et inversement.

Pour des forces F_1 et F_2 unité appliquées dans les directions x et y , le déplacement suivant ces directions s'écrit :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

α, β, γ sont les coefficients d'influence, les 2 coefficients de couplage β étant égaux (Th. de Maxwell).

L'inverse de la matrice des coefficients d'influence donne la matrice des raideurs qui permet d'obtenir les 2 équations du mouvement libre

$$MX'' + KX = 0 \quad K \text{ est symétrique, } K^{-1}, \text{ réelle, l'étant.}$$

$$\begin{vmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'' \\ y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = 0$$

Les solutions de ce système d'équations différentielles peuvent s'obtenir en posant :

$$x = \text{Partie réelle de } x_{\max} e^{j(\omega t + f_1)}$$

$$y = \text{Partie réelle de } y_{\max} e^{j(\omega t + f_2)}$$

d'où :

$$-\omega^2 \begin{vmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{\max} \\ y_{\max} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{\max} \\ y_{\max} \end{vmatrix} = 0$$

Ce système de Cramer aura des solutions en $x_{\max i}$ et $y_{\max i}$ si son déterminant est nul, soit :

$$\begin{vmatrix} a - M_1 \omega^2 & b \\ b & c - M_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (a - M_1 \omega^2)(c - M_2 \omega^2) - b^2 = 0 \quad (I_1)$$

C'est l'équation donnant les pulsations propres du système avec :

$$a = \frac{\delta}{\alpha \delta - \beta^2} \quad b = \frac{-\beta}{\alpha \delta - \beta^2} \quad c = \frac{\alpha}{\alpha \delta - \beta^2}$$

I,2 - Variations des fréquences propres en fonction de l'une des inerties

L'équation (I₁) s'écrit, en posant $\omega^2 = \lambda$:

$$\lambda^2 M_1 M_2 - \lambda (c M_1 + a M_2) + ac - b^2 = 0$$

qui a des racines réelles positives si $ac - b^2 > 0$ ($S > 0$, $P > 0$)

On étudie λ en fonction de M_2 par exemple, ou, plus commodément, M_2 en fonction de λ , soit :

$$M_2 = \frac{\lambda M_1 c - (ac - b^2)}{\lambda^2 M_1 - \lambda a}$$

On a :

$$\frac{\partial M_2}{\partial \lambda} = \frac{-c M_1^2 \lambda^2 + 2 M_1 (ac - b^2) - a (ac - b^2)}{(M_1 \lambda^2 - \lambda a)^2} = \frac{N}{D}$$

$D > 0$

Discriminant de $N = -4 M_1^2 (ac - b^2) b^2 < 0$

Pour λ grand N est < 0

$$\text{d'où } \frac{\partial M_2}{\partial \lambda} < 0$$

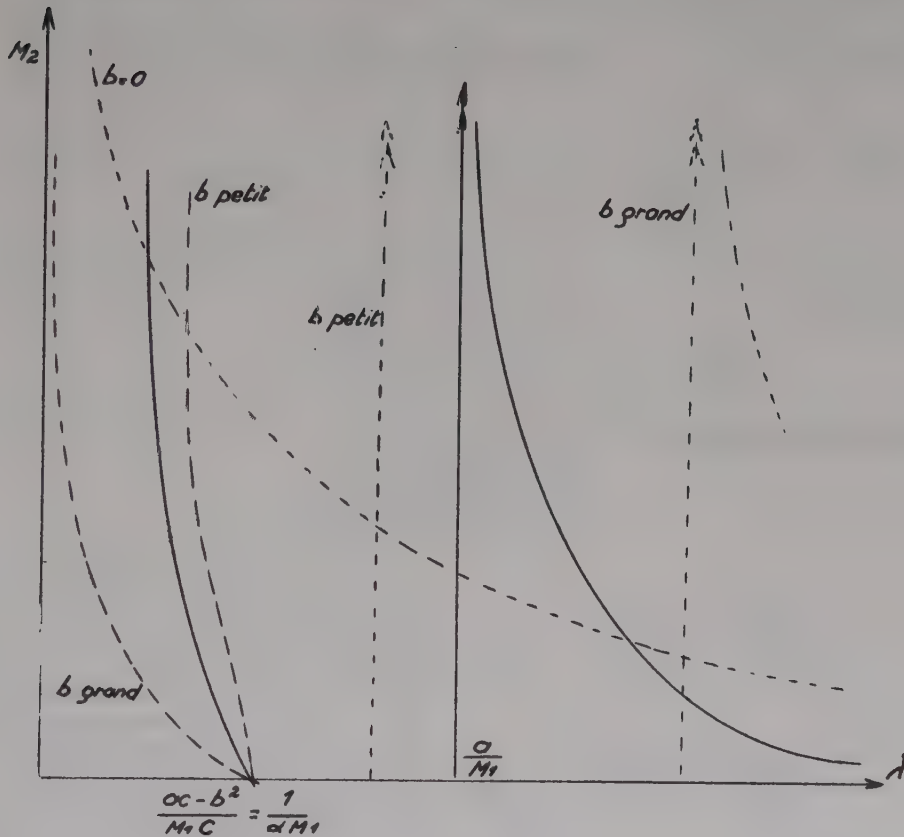
$$M_2 = \frac{\lambda M_1 c - (ac - b^2)}{\lambda^2 M_1 - \lambda a} \quad \text{s'annule pour } \lambda = \frac{ac - b^2}{c M_1} \quad \text{et}$$

tend vers 0 pour λ tendant vers l'infini. Il tend vers l'infini pour λ tendant vers 0 et $\frac{a}{M_1}$.

Pour $\lambda = \frac{ac - b^2}{c M_1}$ la pente de la tangente est négative : $\frac{\partial M_2}{\partial \lambda} = \frac{-M_1^2 c^3}{b^2(ac - b^2)} < 0$

Enfin : $\frac{\partial^2 M_2}{\partial \lambda^2} = -\frac{2(ac - 2b^2)}{b^4(ac - b^2)} c^4$ et la concavité est dirigée vers les M_2 positifs si $2b^2 > ac$

d'où la représentation graphique (cf aussi fig. 2)



Lorsque M_2 varie, on voit que, pour $ac - b^2$ fixé, la pulsation la plus élevée varie de ∞ à $\frac{a}{M_1}$ et la plus basse de $\frac{ac - b^2}{M_1 c}$ à 0.

1,3 - Variation des fréquences propres en fonction du couplage .

1,3,1 - Sur la représentation précédente .

Lorsque b varie, a et c varient, les courbes se déforment . Pour $b=0$, soit $\beta=0$, on a : $M_2 = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{\delta\lambda}$, variations hyperboliques et le point $\frac{a}{M_1} = \frac{1}{\alpha M_1}$ quelconque, indépendant. Dès que $b \neq 0$, les 2 racines, les 2 fréquences sont liées . L'abscisse de l'asymptote verticale est : $\frac{a}{M_1} > \frac{1}{\alpha M_1}$ car $a = \frac{1}{\alpha} \frac{\delta}{\delta - \beta^2} > \frac{1}{\alpha}$. La branche d'hyperbole $< \frac{a}{M_1}$ descend jusqu'au

point : $\frac{ac - b^2}{M_1 c} = \frac{1}{\alpha M_1}$, point fixe . Le reste de la branche devient asymptote de $\frac{a}{M_1}$. La pente de la tangente au point $M_2 = 0$, $\lambda = \frac{ac - b^2}{c M_1} = \frac{1}{\alpha M_1}$ est négative ; elle tend vers $-\infty$ pour b^2 tendant vers 0, vers 0 pour b^2 tendant vers ac .

1,3,2 - On peut aussi décomposer l'équation générale :

$$\lambda^2 M_1 M_2 - \lambda (M_1 c + M_2 a) + ac - b^2 = 0$$

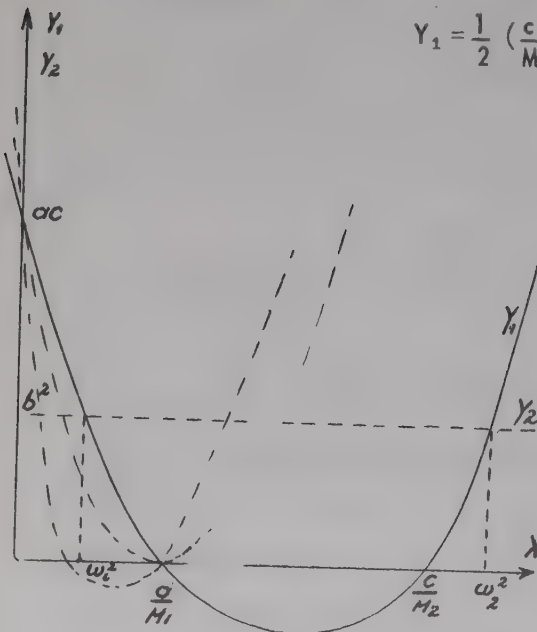
en 2 fonctions :

$$Y_1 = \left(\lambda - \frac{c}{M_2} \right) \left(\lambda - \frac{a}{M_1} \right)$$

$$Y_2 = b^2$$

Y_1 est une parabole de sommet $\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{M_2} + \frac{a}{M_1} \right)$

$$Y_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{M_2} - \frac{2a}{M_1} \right) \left(\frac{a}{M_1} + 2 \frac{c}{M_2} \right)$$



Elle coupe l'axe des Y en ac . Pour que les 2 racines soient réelles et positives, il faut $b^2 < ac$. Lorsque M_2 varie, la parabole se déplace, $\frac{c}{M_2}$ passant d'une valeur supérieure à une valeur inférieure à $\frac{a}{M_1}$. Mais, ω_2 , la plus grande des pulsations, reste supérieure à $\omega_1 < \frac{a}{M_1}$. Pour M_2 grand, ω_1 tend vers 0, ω_2 vers $\frac{a}{M_1}$. Lorsque le coefficient de couplage croît, c'est-à-dire quand b tend vers ac les 2 racines s'éloignent et inversement, car

$$\frac{a}{M_1} = \frac{\delta}{(\alpha\delta - \beta^2)} \frac{1}{M_1}$$

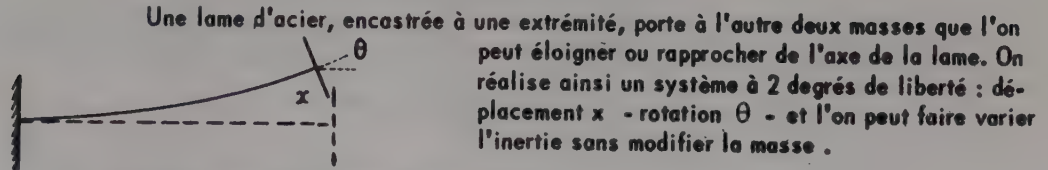
et $\frac{c}{M_2} = \frac{\alpha}{(\alpha\delta - \beta^2)} \frac{1}{M_2}$ augmentent

mais $\frac{c}{M_2} - \frac{a}{M_1}$ augmentent et, de plus, la

droite $Y_2 = b_2$ s'élève. Pour $b = 0$, les 2 racines sont indépendantes, l'une gardant une valeur fixe, l'autre pouvant être, soit plus grande, soit plus petite. Au contraire, du fait du couplage, l'ordre des grandeurs respectives ne peut plus être inversé (en faisant varier une des masses, par exemple).

1,4 - Vérification expérimentale

1,4,1 - Etude théorique du système mécanique.



Le système d'équations du mouvement s'écrit :

$$\begin{vmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'' \\ \theta'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ \theta \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'on tire les 2 pulsations propres de vibration ω_1 et ω_2

$$2 \omega^2 = \left(\frac{a}{M} + \frac{c}{I} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{I} - \frac{a}{M} \right)^2 + \frac{4b^2}{MI}}$$

En portant ces 2 valeurs dans le système de départ, on obtient les formes propres de vibration :

$$(a - \omega_1^2 M)x + b\theta = 0$$

$$(a - \omega_2^2 M)x + b\theta = 0$$

Soit à un facteur multiplicatif près :

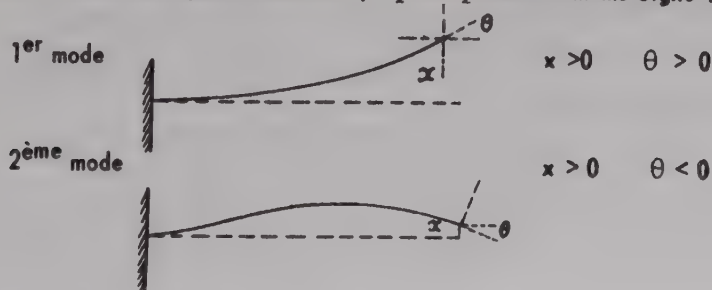
$$x_1 = -b$$

$$\theta_1 = a - \omega_1^2 M = \frac{M}{2} \left(\frac{c}{I} - \frac{a}{M} - \sqrt{\left(\frac{c}{I} - \frac{a}{M} \right)^2 + \frac{4b^2}{MI}} \right)$$

$$x_2 = -b$$

$$\theta_2 = a - \omega_2^2 M = \frac{M}{2} \left(\frac{c}{I} - \frac{a}{M} + \sqrt{\left(\frac{c}{I} - \frac{a}{M} \right)^2 + \frac{4b^2}{MI}} \right)$$

Donc θ_1 et θ_2 sont de signes contraires, x_1 et x_2 étant de même signe : d'où la représentation :



1.4,2 Détermination des coefficients a, b, c .

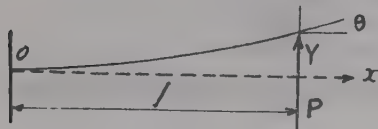
Une force P appliquée à l'extrémité d'une lame encastrée donne une flèche :

$f = \frac{Pl^3}{3EI}$ et une rotation $\theta = \frac{Pl^2}{2EI}$ et un couple $Pf = \frac{Pl^2}{2EI}$ et $\theta = \frac{Pl}{EI}$, d'où la matrice des coefficients d'influence :

$$K^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{vmatrix} \quad \text{et la matrice de raideur } K = \begin{vmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} \\ \frac{-6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{vmatrix}$$

1.4,3 Calcul de la masse équivalente de la lame pour le premier mode de vibration.

La masse des surcharges placées aux extrémités est plus importante que la masse de la lame. Nous prendrons comme déformée celle d'une lame encastrée, de masse négligeable, chargée à l'extrémité libre :



$$Ely'' = Mf = +P(l-x)$$

$$Ely' = \frac{-P(l-x)^2}{2} + c_1$$

$$Ely = +\frac{P(l-x)^3}{6} + c_1x + c_2$$

Pour $x = 0$ $y = 0$ $c_2 = -\frac{Pl^3}{6EI}$

Pour $x = l$ $y = \text{flèche}$
 $y = Y = \frac{Pl^3}{3EI}$

D'où la flèche en un point quelconque en fonction de la flèche à l'extrémité

$$y = Y \cdot \frac{1}{2l^3} [(l-x)^3 + 3xl^2 - l^3]$$

L'énergie cinétique d'un petit élément :

$$2dT = y_{(t)}'^2 dm$$

$$= \rho \cdot y_t'^2 dx = \rho \cdot Y_t'^2 \frac{1}{4l^3} [3x^2l - x^3]^2 dx$$

L'énergie cinétique totale :

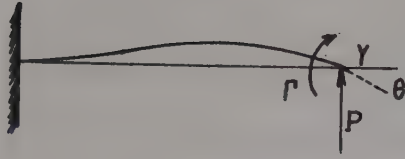
$$2T = \rho Y_t'^2 \frac{1}{4l^3} \int_0^l (9x^4l^2 + x^6 - 6x^5l) dx$$

$$2T = \frac{33}{140} \rho l Y_t'^2 = \frac{33}{140} M \cdot Y_t'^2$$

La masse de la lame intervient sensiblement pour le $\frac{1}{4}$ de sa valeur .

1.4,4 Calcul de la masse équivalente de la lame pour le 2^{ème} mode de vibration

La flèche Y est petite . On prend une déformée telle que la flèche soit nulle .



$$EI y'' = Mf = \Gamma - P(l-x)$$

$$EI y' = \Gamma x + \frac{P(l-x)^2}{2} + K_1$$

$$EI y = \Gamma \frac{x^2}{2} - \frac{P(l-x)^3}{6} + K_1 x + K_2$$

Pour $x = 0$ $y = 0$ $K_2 = \frac{Pl^3}{6}$ et pour $x = l$ $y = 0$ $\frac{\Gamma l^2}{2} + K_1 l + K_2 = 0$

$$y' = 0 \quad K_1 = -\frac{Pl^2}{2}$$

$$\Gamma = \frac{2Pl}{3}$$

$$y' = \theta = \frac{Pl^2}{6EI}$$

$$EI y = \frac{Pl}{3} x^2 - \frac{P(l-x)^3}{6} - \frac{Pl^2}{2} x + \frac{Pl^3}{6}$$

$$y = \theta \left[-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right]$$

D'où l'expression de l'énergie cinétique :

$$2T = \rho \theta l^2 + \int_0^l \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right)^2 dx$$

$$2T = \frac{Ml^2}{105} \cdot \theta l^2$$

L'inertie équivalente est donc : $\frac{Ml^2}{105}$

1.4,5 Calculs des valeurs théoriques pour le système considéré

Il a été schématisé et coté sur la fig. 10

a). Calcul de a, b, c

L'inertie de flexion est $I = \frac{h i^3}{12} = 3.10^{-1} \text{ cm}^4$

La longueur utile est : $l + \frac{g}{2} = 46,7 \text{ cm}$

d'où la valeur des coefficients :

$$a = \frac{12 EI}{l^3} = 7,06.10^7 \text{ dynes cm}^{-1}$$

$$c = \frac{4EI}{l} = 5,14 \cdot 10^{10} \text{ dynes cm}$$

$$b = \frac{6EI}{l^2} = 1,65 \cdot 10^9 \text{ dynes}$$

b) Calcul de la masse M

Poids calculé des lames support : 1450 g
 « de la lame : 2380 g

Soit un total de 3830 g qui correspond, à 5g près, au poids total mesuré, moins le poids calculé de la partie encastrée.

Poids mesuré de chacune des masses mobiles = 3 kg.

Nous considérons que la masse de la lame correspondant à la longueur l n'intervient sensiblement que pour le quart de sa valeur (cf par. 1,4,3)

$$\text{D'où la Masse équivalente } M = [3 + 3 + (\frac{1,940}{4} + 440) + 1,450] \cdot 10^3$$

$$M = 8380 \text{ g.}$$

c) Calcul de l'Inertie I par rapport à l'axe Δ , supposé axe de rotation.

I est la somme de 3 inerties :

I_1 = inertie des 2 masses

I_2 = « des lames support

I_3 = « de la lame

$$I_1 = \frac{m_1}{12} (a^2 + b^2) + m_1 L^2 \quad \text{avec } m_1 = 6 \cdot 10^3 \text{ g.}$$

$$I_1 = 6,12 \cdot 10^4 \text{ g.cm}^2 + m_1 L^2$$

$$I_2 = \frac{4m_2 f^2}{12} + \frac{m_2 g^2}{4} \quad \text{avec } m_2 = 1450 \text{ g}$$

$$I_2 = 1,44 \cdot 10^5 \text{ g.cm}^2$$

$$I_3 = \frac{m_3 (l + \frac{g}{2})^2}{105} + \frac{m_4 g^2}{12} \quad \text{avec } m_3 = 2160 \text{ g}$$

$$m_4 = 220 \text{ g}$$

$$I_3 = 4,9 \cdot 10^4 \text{ g.cm}^2$$

d'où l'inertie équivalente totale :

$$I = 2,54 \cdot 10^5 \text{ g.cm}^2 + m_1 L^2$$

1,4,6 Application . Calcul des fréquences N pour différentes valeurs de la distance L .

Elles sont données par la formule 1.4,1

$$2\lambda = \frac{c}{l} + \frac{a}{M} + \sqrt{\left(\frac{c}{l} - \frac{a}{M}\right)^2 + \frac{4b^2}{Ml}}$$

$$\text{avec } \lambda = 4 \pi^2 N^2$$

L	l 105 g cm ²	$\frac{c}{l}$ 10 ⁴	$\frac{a}{M}$ 10 ³	$\left(\frac{c}{l} - \frac{a}{M}\right)^2$ 10 ⁸	$\frac{4b^2}{Ml}$ 10 ⁸	$\sqrt{\Delta}$ 10 ⁴	$2\lambda_1$ 10 ⁴	$2\lambda_2$ 10 ⁴	N_1 Hz	N_2 Hz
144 mm	14,96	3,44	8,44	6,76	0,868	3,93	8,21	0,35	32	6,62
104 mm	9,02	5,7	8,44	23,6	1,44	6,16	12,6	0,38	39,7	6,9
34 mm	3,23	16,74	8,44	226,5	4,02	16,3	33	0,4	64,2	7,07

N_1 est connu à 4 Hz près , N_2 à 2 Hz - (cf en annexe -Chapitre I) (1,4)

1,4,7 Valeurs expérimentales .

a) Technique de mesures (cf fig. 10)

Les mesures ont été effectuées au laboratoire de Mécanique des Structures à l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique à Nantes .

L'excitation de la lame était obtenue par 2 excitateurs Prodera type JE 21 , placé de part et d'autre et alimentés en série et en opposition de phase. Le signal sinusoïdal délivré par un générateur Philips TBF était amplifié puis contrôlé en intensité par un amplificateur GM et envoyé aux excitateurs.

Un capteur « vitesse » Prodera type JE 22 délivrait une tension lue directement sur un millivoltmètre.

La résonance se traduit par un maximum de tension, résonance très pointue, car l'amortissement est dû seulement au frottement dans l'air et au frottement interne . La sensibilité est limitée à celle du générateur, les lectures étant faites de façon très précise au compteur électronique . La précision des mesures en fréquence est de l'ordre du 1/100 d' Hz .

b) Résultats (cf courbe 1)

Lmm	144	104	94	84	74	64	54	44	34
N ₁ Hz	6,9	7	7,04	7,08	7,18	7,23	7,2	7,3	7,37
N ₂ Hz	35,9	44,5	47,05	50,8	54,6	59,3	61,2	69	72

N₁ est connue au 1/100 Hz , N₂ au 1/10 Hz

1,5 - Conclusion -

Les valeurs expérimentales permettent de tracer une courbe $N^2 = f(L^2)$. C'est une portion décalée de la courbe théorique $N^2 = f(l)$

Les valeurs théoriques correspondant à 3 valeurs de L se situent au dessous, mais suivant la courbe expérimentale . La correspondance est bonne (cf chap. : Précision des résultats) et malgré une erreur systématique apparente, la vérification est satisfaisante.

Mais les résultats précédents nous prouvent que l'on ne peut effectuer valablement un calcul théorique des fréquences pour la suite de notre travail. Pour avoir une précision suffisante, nous serons donc amené à utiliser les résultats expérimentaux pour calculer les masses et inertie équivalentes dans l'étude des dédoublements de fréquences :

÷

÷ ÷

÷

Chapitre II

COUPLAGE GYROSCOPIQUE

La mise en équation générale et les calculs théoriques ont été établis par M. PIRONNEAU, Professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Nantes, Directeur de l'E.N.S.M. :
 « Effets gyroscopiques et vitesses critiques des rotors » Annales de l'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE de MECANIQUE de NANTES - 1963 .

II,1 - Mise en équation du mouvement du rotor .

II.1,1 - Détermination des paramètres .

On considère un rotor de masse m , de centre de gravité G , tournant à l'extrémité d'une tige de section rectangulaire . Soit C le centre de la section droite, que l'on suppose se déplacer dans un plan .

Soit $\vec{C}x_1, \vec{C}y_1$, les directions principales de la section droite et $\vec{C}z_1$ la normale directe. La position du centre de gravité dans ce système est définie par $\vec{CG} = d\vec{x}_1 + e\vec{y}_1$.

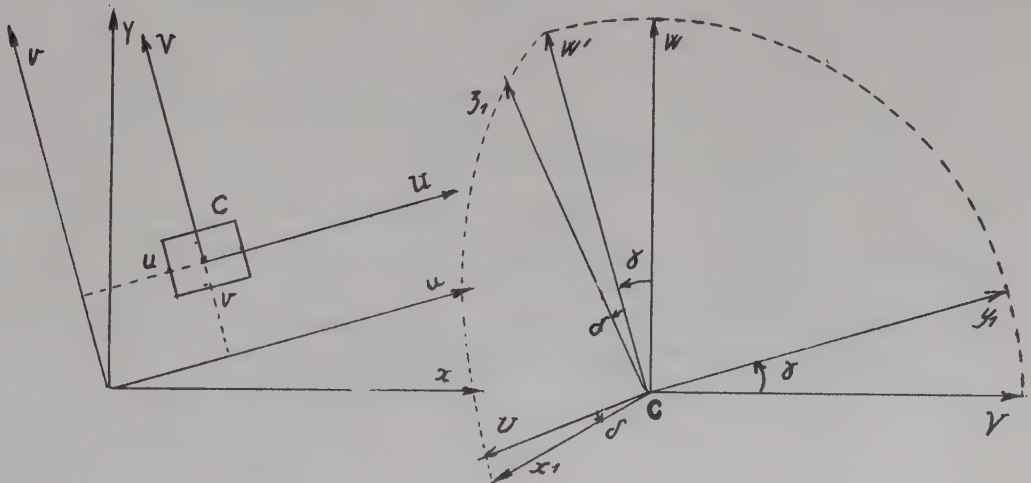
Soit $Oxyz$, trièdre fixe, $\vec{O}x, \vec{O}y$ confondu avec $\vec{C}x_1, \vec{C}y_1$ à l'instant initial au repos .

Une rotation d'angle ψ autour de $\vec{O}z$ amène $\vec{O}x, \vec{O}y$ en $\vec{O}u, \vec{O}v$.

Soient u et v les coordonnées de C dans Ouv , et $\vec{CU}, \vec{CV}$ des axes parallèles à $\vec{O}u, \vec{O}v$. La position du centre de gravité peut alors être définie par l'intermédiaire du système $CUVW$:

Une rotation γ par rapport à $\vec{CU}$ amène $\vec{CV}$ en $\vec{C}y_1$ et $\vec{CW}$ en $\vec{C}w'$.

Une rotation δ par rapport à $\vec{C}y_1$ amène $\vec{CU}$ en $\vec{C}x_1$ et $\vec{C}w'$ en $\vec{C}z_1$.



II.1,2 - Expression de l'Energie Potentielle .

Les déplacements en u et δ et v et γ sont seuls couplés. Sous forme matricielle, la valeur de l'Energie Potentielle s'écrit :

$$2W = \begin{vmatrix} u & v & \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & c_2 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \\ \gamma \\ \delta \end{vmatrix} = \tilde{U} K_E \cdot U$$

II.1,3 - Expression de l'Energie Cinétique

Soit $\vec{\Omega}$, vecteur rotation instantanée

$$\vec{\Omega} = \psi' \vec{z} + \gamma' \vec{u} + \delta' \vec{y}_1$$

Soient p, q, r les composantes de $\vec{\Omega}$ dans $Cx, y_1 z_1$

Le changement d'axes $Oxyz$ en $OUVW$, puis OUy_1W' puis $Ox_1y_1z_1$ s'obtient par le produit des 3 matrices correspondantes : (pour C en O - OC = translation)

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \delta & 0 & -\sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma + \sin \gamma & \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

(U, y₁, W') (U, V, W)

En sens inverse

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ +\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$$

(U, V, W) (U, y₁, W')

D'où : $\vec{U} = \cos \delta \vec{x}_1 + \sin \delta \vec{y}_1$

$$\vec{z} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ -\sin \delta x_1 + \cos \delta z_1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{z} = -\sin \delta \cos \gamma \vec{x}_1 + \sin \gamma \vec{y}_1 + \cos \gamma \cos \delta \vec{z}_1$$

d'où : $P = -\delta \psi' + \gamma'$

$$q = \gamma \psi' + \delta'$$

$$r = \left[1 - \frac{\gamma^2 + \delta^2}{2} \right] \psi' + \delta \gamma'$$

en se limitant aux termes du 2^{ème} ordre pour δ, γ .

Le tenseur d'inertie dans les axes $Cx_1y_1z_1$ du solide peut s'écrire :

$$I(S/C) = \begin{vmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{vmatrix}$$

et par rapport à des axes parallèles à $x_1 y_1 z_1$ et passant par G

$$I(S/G) = \begin{vmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{vmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= A_1 + m e^2 & D &= D_1 \\ B &= B_1 + m d^2 & E &= E_1 \\ C &= C_1 + m (d^2 + e^2) & F &= F_1 + m d e \end{aligned}$$

L'expression de l'énergie cinétique s'écrit :

$$2W = m \vec{V}(G)^2 + \vec{\Omega} I(S/G) \vec{\Omega}$$

avec

$$\vec{V}(G) = \vec{V}(C) + \vec{\Omega}_A \vec{CG}$$

11.1.4 Equations du mouvement dans les axes mobiles .

On écrit les équations de Lagrange, sachant que :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{x} = \psi' + \gamma \delta' = R = C^{te}$$

et on ne conserve dans ces équations que les termes du 1^{er} ordre .

Pour le paramètre ψ , on obtient la relation liant les paramètres u v γ δ et le couple moteur λ , d'axe z .

Les autres équations traduisent le mouvement du Centre de Gravité .

Le 1^{er} terme de l'Energie Cinétique peut s'écrire :

$$V(\vec{G})^2 = V(\vec{C})^2 + \vec{\Omega}_A \vec{CG}^2 + 2 \vec{VC} \cdot \vec{\Omega}_A \vec{CG}$$

$$\vec{OC} = u \vec{U} + v \vec{V}$$

$$V(\vec{C}) = (u' - v \psi') \vec{U} + (v' + u \psi') \vec{V}$$

$$\vec{\Omega}_A \vec{CG} = (pe - qd) \vec{z}_1 + rd \vec{g}_1 - re \vec{x}_1$$

d'où

$$\begin{aligned} V(\vec{G})^2 &= (u' - \psi' v)^2 + (v' + \psi' u)^2 + r^2 e^2 + r^2 d^2 + (pe - qd)^2 \\ &\quad + 2(u' - \psi' v) [-re + (pe - qd) \delta] + 2(v' + \psi' u) [-re \delta \gamma + rd + (pe - qd)(-\gamma)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\vec{G})^2 &= \psi'^2 (u^2 + v^2) + u'^2 + v'^2 - 2\psi' u' v + 2\psi' u v' + [r^2 (e^2 + d^2) + (pe - qd)^2] \\ &\quad + 2(u' - \psi' v)(-re) + 2(v' + \psi' u)rd \end{aligned}$$

Le deuxième terme :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} \cdot (S/G) \vec{\Omega} &= A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2 - 2D_1 q r - 2E_1 r p - 2F_1 p q \\ &= A p^2 + B q^2 + C r^2 - 2D q r - 2E p r - 2F p q - m [r^2(e^2 + d^2) + (p e - q d)^2]\end{aligned}$$

D'où l'expression de l'Energie Cinétique, les termes entre crochets disparaissant, et avec

$$\begin{aligned}p &= -\psi' \delta + \gamma' \\ q &= \psi' \gamma + \delta' \\ r &= \psi' \left(1 - \frac{\gamma^2 + \delta^2}{2}\right) + \gamma' \delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2T &= m [\psi'^2 (u^2 + v^2) + u'^2 + v'^2 + 2\psi' (uv' - u'v) + 2(u' - \psi'v) (-re) + 2(v' + \psi'u)rd] \\ &\quad + A p^2 + B q^2 + C r^2 - 2D q r - 2E p r - 2F p q\end{aligned}$$

D'où le calcul des Equations de Lagrange pour les paramètres u v γ δ :

Equation en u

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial u'} \right) &= u'' - \psi' v' \\ \frac{\partial T}{\partial u} &= \psi'^2 u + \psi' v' + \psi'^2 d \\ \frac{Eq(u)}{m} &= u'' - 2\psi' v' - \psi'^2 u - \psi'^2 d\end{aligned}$$

Equation en v

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial v'} \right) &= v'' + \psi'' u' \\ \frac{\partial T}{\partial v} &= \psi'^2 v - \psi' u' + \psi'^2 e \\ \frac{Eq(v)}{m} &= v'' + 2\psi' u' - \psi'^2 v - \psi'^2 e\end{aligned}$$

Equation en γ

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \gamma'} &= A p + C r \delta - D q \delta - E r - E p \delta - F q \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \gamma'} \right) &= A [\gamma'' - \psi' \delta'] + C \psi' \delta' - F \delta'' - F \psi' \gamma' \\ \frac{\partial T}{\partial \gamma} &= B (\psi'^2 \gamma + \psi' \delta') - D \psi' (\psi' + \gamma' \delta) - F \psi' (\psi' \delta + \gamma') - C \gamma \psi'^2 \\ \frac{Eq(\gamma)}{m} &= A \gamma'' - F \delta'' + \delta' \psi' (C - A - B) - B \psi'^2 \gamma - F \psi'^2 \delta + D \psi'^2 + C \psi'^2 \gamma\end{aligned}$$

Equation en δ

$$\frac{\partial T}{\partial \delta'} = Bq - Dr - Fp$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \delta'} \right) = B(\psi' \gamma' + \delta'') - F(-\psi' \delta' + \gamma'')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \delta} = & A(-\psi' \delta + \gamma')(-\psi') + C(\psi' + \gamma' \delta) \gamma' - D(\psi' \gamma + \delta') \gamma' \\ & - E(\psi' + \gamma' \delta)(-\psi') - C\psi' \delta - E(-\psi' \delta + \gamma') \gamma' - F(\psi' \gamma + \delta')(-\psi') \end{aligned}$$

$$\frac{Eq(\delta)}{m} = B\delta'' - F\gamma'' + \gamma' \psi' (B+A-C) - A\psi' \delta - F\psi' \gamma - E\psi' \delta + C\psi' \delta$$

Soit en posant :

$$M_1 = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & -F \\ 0 & 0 & -F & B \end{vmatrix} \quad G_1 = \psi' \begin{vmatrix} 0 & -2m & 0 & 0 \\ +2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C-A-B \\ 0 & 0 & -[C-A-B] & 0 \end{vmatrix}$$

$$K_m = \psi'^2 \begin{vmatrix} -m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C-B & -F \\ 0 & 0 & -F & C-A \end{vmatrix} \quad \phi_m = \begin{vmatrix} md \\ me \\ -D \\ E \end{vmatrix} \psi'^2 \quad U = \begin{vmatrix} u \\ v \\ \gamma \\ \delta \end{vmatrix}$$

on peut écrire :

$$M_1 U'' + G_1 U' + [K_m + K_E] U = \phi_m + \phi_d$$

ϕ_d = matrice des forces extérieures appliquées .

II, 2 - Changement de repères .

II.2.1 Etude de la transformation

Soit T l'opérateur faisant passer de la base $\vec{x}$ à la base $\vec{u}$

$$\vec{U} = T \vec{x}$$

Soit un vecteur $\vec{V}$ de composante X dans la base $\vec{x}$, U dans la base $\vec{u}$

$$\vec{V} = \vec{x} X$$

$$\vec{V} = \vec{u} U$$

Soit : $\vec{V} = (\tilde{T}\vec{x})U$
 $\vec{V} = \vec{x} \tilde{T} U$

d'où $X = \tilde{T} U$ ou $U = \tilde{T}^{-1} X = SX$ avec $S = \tilde{T}^{-1}$

Dans la base $\vec{u}$, on a la relation :

$$M_1 u'' + G_1 u' + K_1 u = \phi_m + \phi_d$$

Pour passer dans la base $\vec{x}$, on transforme chaque terme :

$$M = S^{-1} \tilde{M}_1 \quad G = S^{-1} G_1 \quad K = S^{-1} K_1 \quad F_m = S^{-1} \phi_m$$

$$U = SX \quad U' = SX' + S'X \quad U'' = SX'' + 2S'X' + S''X$$

$$\tilde{u} K_1 U = \tilde{x} S^{-1} K_1 SX$$

$$\tilde{u} G_1 U' = \tilde{x} [S^{-1} G_1 SX' + S^{-1} G_1 S'X]$$

$$\tilde{u} M_1 U'' = \tilde{x} [S^{-1} M_1 SX'' + 2S^{-1} M_1 S'X' + S^{-1} M_1 S''X]$$

On obtient une relation de la forme :

$$MX'' + G X' + K X = F_m + F_d$$

avec

$$M = S^{-1} \tilde{M}_1 S \quad G = S^{-1} G_1 S + 2S^{-1} \tilde{M}_1 S'$$

$$F_m = S^{-1} \phi_m \quad K = S^{-1} K_1 S + S^{-1} G_1 S' + S^{-1} \tilde{M}_1 S''$$

F_d = Forces directement appliquées, dans le système $\vec{x}$.

11,2,2 Application de la Transformation

a) Détermination de l'opérateur T

Les éléments u, v de la base $\vec{U}$ sont liés à x, y de la base $\vec{x}$ par la relation :

$$\begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

On choisit les éléments α, β, φ devant correspondre à γ, δ, ψ , tels que

α : rotation par rapport à $\vec{Ox}$, amenant $\vec{Oy}$ en $\vec{Os}$, // c x_1y_1 et $\vec{Oz}$ en $\vec{OH}$

β : " " à O_s , " O_x en $O_r // c_{x_1}y_1$ et $\vec{OH}$ en $\vec{Oz}'_1$

φ : "à $\vec{Oz}_1$ " " $\vec{Os}$ et $\vec{Or}$ en $\vec{Ox}'_1, \vec{Oy}'_1 //$ à $c\vec{x}_1, c\vec{y}_1$

Les 2 trièdres $\{Ox_1 y_1 z_1$ sont parallèles directs.

On avait, en γ, δ, ψ ,
(au 1^o ordre)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\delta \\ 0 & 1 & \gamma \\ \gamma & -\gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a en α, β, φ

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Soit au 1er ordre

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

On a d'autre part $\varphi \neq \psi$ et R_t au 1^{er} ordre également

Soit en identifiant

$$\begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & -\delta \\ -\sin \psi & \cos \psi & \gamma \\ \delta \cos \psi & -\gamma \cos \psi & 1 \\ +\gamma \sin \psi & +\delta \sin \psi & 1 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & (\alpha \sin \psi - \beta \cos \psi) \\ -\sin \psi & \cos \psi & (\alpha \cos \psi + \beta \sin \psi) \\ \beta & -\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} \gamma \\ \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$$

on a donc

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ Y \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos R t & \sin R t & 0 & 0 \\ -\sin R t & \cos R t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos R t & \sin R t \\ 0 & 0 & -\sin R t & \cos R t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

T est antisymétrique, de déterminant = 1 et on a $T^{-1} = \tilde{T}$ et $S = \tilde{T}^{-1} = T$.

b) Calcul des différents termes

$$F = S^{-1} \phi \quad \text{d'où} \quad F = R^2 \begin{vmatrix} m(d \cos Rt - e \sin Rt) \\ m(d \sin Rt + e \cos Rt) \\ -(D \cos Rt + E \sin Rt) \\ -(D \sin Rt - E \cos Rt) \end{vmatrix}$$

$$M = S^{-1} M_1 S$$

Les opérateurs S et S^{-1} agissent séparément sur les composantes x, y et α, β .

Pour les composantes de la matrice M relative à xy , l'opération $S^{-1} M_1 S$ s'écrit :

$$M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos Rt & -\sin Rt \\ \sin Rt & \cos Rt \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos Rt & \sin Rt \\ -\sin Rt & \cos Rt \end{vmatrix}$$

La suite des opérations est donc :

Rotation (+Rt) + homothétie + Rot de (-Rt) = homothétie

D'où les 12 premiers coefficients de M immédiatement.

Il faut calculer les 4 derniers. On obtient :

$$M = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & -F_0 \\ 0 & 0 & -F_0 & B_0 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A_0 &= \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 2Rt + F \sin 2Rt \\ B_0 &= \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 2Rt - F \sin 2Rt \\ F_0 &= -\frac{A-B}{2} \sin 2Rt + F \cos 2Rt \end{aligned}$$

$$G = 2 S^{-1} M_1 S' + S^{-1} G_1 S$$

$$\text{On a donc} \quad SG = 2 M_1 S' + G_1 S$$

Pour les coefficients relatifs à xy :

l'opération : $2 M_1 S' = (S')$: Rotation $(+\frac{\pi}{2} + x) + (2 M_1) = \text{homothétie } (2m.R)$

et $G_1 S = (S)$: Rotation $(x) + (G_1)$: homothétie $(2m.R) + \text{Rotation } (-\frac{\pi}{2})$

La somme des 2 est un opérateur nul.

D'où les 12 premiers coefficients de G. Il faut calculer les 4 derniers.

En fin de calcul, on obtient :

$$G = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A'_0 & CR-F'_0 \\ 0 & 0 & -CR-F'_0 & B'_0 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A'_0 &= \frac{dA_0}{dt} \\ B'_0 &= \frac{dB_0}{dt} \\ F'_0 &= \frac{dF_0}{dt} \end{aligned}$$

$$K = S^{-1}K_1S + S^{-1}G_1S' + S^{-1}M_1S''$$

Soit :

$$SK = K_1S + G_1S' + M_1S''$$

$$\text{avec } S'' = -SR^2$$

$$\text{et } K_1 = K_m + K_E$$

d'où :

$$SK = K_E S + [K_m - MR^2]S + G_1S'$$

$$SK = K_E S + \begin{vmatrix} -2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C-B-A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C-B-A \end{vmatrix} S + \begin{vmatrix} 0 & -2m & 0 & 0 \\ -2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C-B-A \\ 0 & 0 & -(C-B-A) & 0 \end{vmatrix} S'$$

Par le même raisonnement on trouve que la somme des 2 derniers termes est nulle

$$[\text{Rotation } (+Rt) + \text{homothétie } (+2m) + \text{Rotation } (-\pi)]$$

$$+ [\text{Rotation } (+Rt + \frac{\pi}{2}) + \text{homothétie } (2m) + \text{Rotation } (-\frac{\pi}{2})] = 0 \text{ en } x, y$$

$$[\text{Rotation } (Rt) + \text{homothétie } (C-B-A)]$$

$$+ [\text{Rotation } (+Rt + \frac{\pi}{2}) + \text{homothétie } (C-B-A) + \text{Rotation } (+\frac{\pi}{2})] = 0 \text{ en } \alpha, \beta$$

K se réduit donc à $S^{-1}K_E S$. Il faut effectuer le calcul ; on trouve :

$$K = \begin{vmatrix} \frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1-a_2}{2} \cos 2Rt & \frac{a_1-a_2}{2} \sin 2Rt & \frac{b_1-b_2}{2} \sin 2Rt & -\frac{b_1+b_2}{2} - \frac{b_1-b_2}{2} \cos 2Rt \\ \frac{a_1-a_2}{2} \sin 2Rt & \frac{a_1+a_2}{2} - \frac{a_1-a_2}{2} \cos 2Rt & \frac{b_1+b_2}{2} - \frac{b_1-b_2}{2} \cos 2Rt & -\frac{b_1-b_2}{2} \sin 2Rt \\ \frac{b_1-b_2}{2} \sin 2Rt & \frac{b_1+b_2}{2} - \frac{b_1-b_2}{2} \cos 2Rt & \frac{c_1+c_2}{2} + \frac{c_1-c_2}{2} \cos 2Rt & -\frac{c_1-c_2}{2} \sin 2Rt \\ -\frac{b_1+b_2}{2} - \frac{b_1-b_2}{2} \cos 2Rt & -\frac{b_1-b_2}{2} \sin 2Rt & -\frac{c_1-c_2}{2} \sin 2Rt & \frac{c_1+c_2}{2} - \frac{c_1-c_2}{2} \cos 2Rt \end{vmatrix}$$

11,3 Mouvement d'un rotor parfait .

11,3,1 Détermination des Equations :

Nous avons $A = B$ $D=E=F=0$

Le Centre de Gravité est en c $d=e=0$

Pour les raideurs : $a_1=a_2$ $b_1=b_2$ $c_1=c_2$

Les équations s'écrivent : $MX'' + GX' + KX = F_d + F_m$

$$\text{avec } M = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{vmatrix} \quad G = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cr \\ 0 & 0 & -Cr & 0 \end{vmatrix} \quad K = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & -b & c & 0 \\ b & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

et $F_m = 0$

11,3,2 Etude du mouvement libre

On a $F_d = 0$

La solution du système peut être obtenue en posant :

$$X = \text{Re} [(X) e^{j\omega t}] \quad X = \text{partie réelle de } (X_{\max}) e^{j\omega t}$$

Le système d'équations devient :

$$[-M\omega^2 + JG\omega + K](X) = 0$$

Il y aura des solutions si le déterminant de la matrice entre crochets est nul ; soit :

$$\begin{vmatrix} a - m\omega^2 & 0 & 0 & -b \\ 0 & a - m\omega^2 & b & 0 \\ 0 & b & c - A\omega^2 & JCR\omega \\ -b & 0 & -JCR\omega & c - A\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

A) Cas particulier $b = 0$

Pas de couplage élastique entre rotation et déplacement.

On doit avoir : soit $a - m\omega^2 = 0$

$$\text{soit : } \begin{vmatrix} c - A\omega^2 & JCR\omega \\ -JCR\omega & c - A\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

La première relation correspond aux oscillations en x ou y , de pulsation $\sqrt{\frac{a}{m}}$ indépendantes.

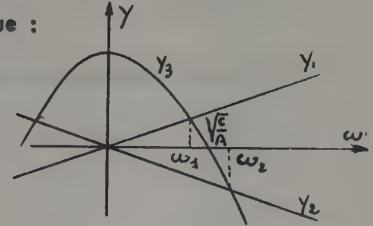
La deuxième montre que α et β sont couplés par effet gyroscopique :

$$(c - A\omega^2)^2 - C^2 R^2 \omega^2 = 0$$

$$\text{En posant } Y_1 = CR\omega$$

$$Y_2 = -CR\omega$$

$$Y_3 = c - A\omega^2$$



on obtient une représentation graphique qui permet de situer les 2 racines de part et d'autre de $\sqrt{\frac{c}{A}}$

B) Cas général

$$[-M\omega^2 + JC\omega + K][X] = 0$$

Le système général développé s'écrit :

$$(a - m\omega^2)(x) - b(\beta) = 0$$

$$(a - m\omega^2)(y) + b(\alpha) = 0$$

$$b(y) + (c - A\omega^2)(\alpha) + JCR\omega(\beta) = 0$$

$$-b(x) - JCR\omega(\alpha) + (c - A\omega^2)(\beta) = 0$$

$$\text{Si } (a - m\omega^2) = 0$$

la seule solution possible : $(X) = 0$

$$\text{Si } (a - m\omega^2) \neq 0$$

$$(x) = \frac{b}{a - m\omega^2}(\beta) \quad \text{et} \quad (y) = \frac{-b}{a - m\omega^2}(\alpha)$$

$$\text{Soit } -JCR\omega(a - m\omega^2)(\alpha) + [(c - A\omega^2)(a - m\omega^2) - b^2](\beta) = 0$$

$$[(c - A\omega^2)(a - m\omega^2) - b^2](\alpha) + JCR\omega(a - m\omega^2)(\beta) = 0$$

On a des solutions, non indépendantes, si le déterminant est nul.

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} -JCR\omega(a - m\omega^2) & (c - A\omega^2)(a - m\omega^2) - b^2 \\ (c - A\omega^2)(a - m\omega^2) - b^2 & JCR\omega(a - m\omega^2) \end{vmatrix}$$

$$[(a - m\omega^2)(c - A\omega^2) - b^2]^2 - [a - m\omega^2]^2 C^2 R^2 \omega^2 = 0$$

$$\text{En posant } Y_1 = [(a - m\omega^2)(c - A\omega^2) - b^2]$$

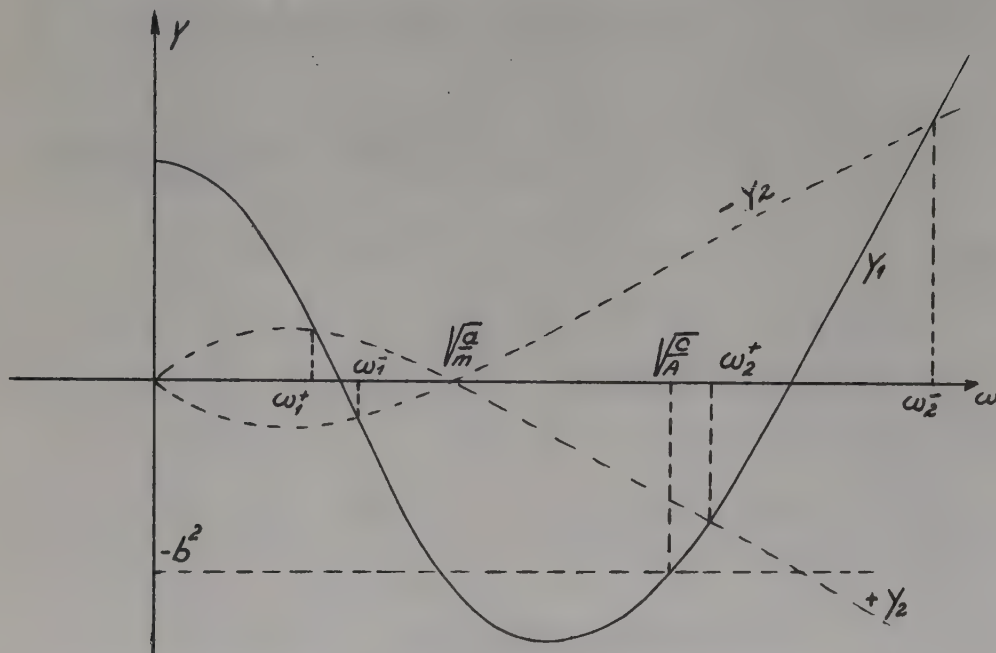
$$\text{et } Y_2 = CR\omega(a - m\omega^2)$$

on doit avoir :

$$Y_1 = \varepsilon Y_2 \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

On a 2 racines dans chaque cas, soit $\begin{vmatrix} \omega_1^+ \\ \omega_2^+ \end{vmatrix}$ pour $\varepsilon = +1$ et $\begin{vmatrix} \omega_1^- \\ \omega_2^- \end{vmatrix}$ pour $\varepsilon = -1$

Graphiquement, on a les positions relatives des solutions :



Soit alors ω_i une des quatre solutions :

$$\text{Posons } \lambda_i = \frac{b}{a - m\omega_i^2}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i > 0 & \text{ pour } \omega_i = \omega_1^+, \omega_1^- \\ \lambda_i < 0 & \text{ pour } \omega_i = \omega_2^+, \omega_2^- \end{aligned}$$

$$\text{On a : } (x_i) = \lambda_i (\beta_i)$$

$$(y_i) = -\lambda_i (\alpha_i)$$

$$(\alpha_i) = J \left(\frac{Y_2}{Y_1} \right)_{\omega=\omega_i} (\beta_i) = J \varepsilon (\beta_i)$$

En posant $\beta_i = \theta$, quelconque et petit

$$(X_i) = \begin{vmatrix} \lambda_i \\ -J \lambda_i \varepsilon \\ J \varepsilon \\ 1 \end{vmatrix} \theta \quad \text{d'où}$$

$$x_i = \lambda_i \theta \cos \omega_i t$$

$$y_i = \varepsilon \lambda_i \theta \sin \omega_i t$$

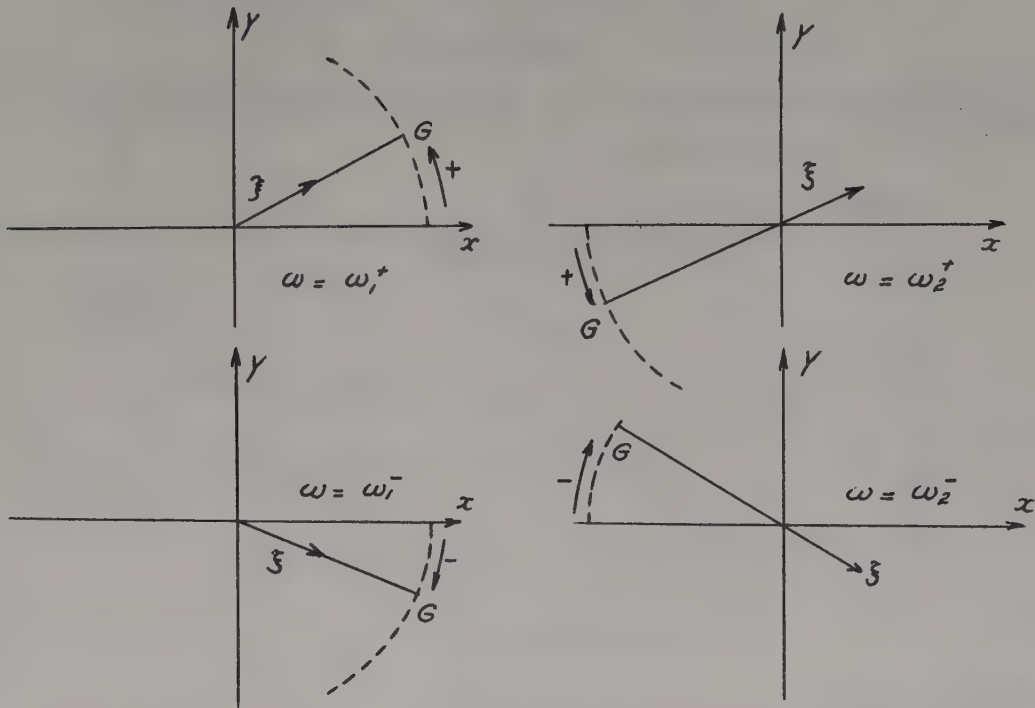
$$\alpha_i = -\varepsilon \theta \sin \omega_i t$$

$$\beta_i = \theta \cos \omega_i t$$

Le Centre de Gravité décrit un cercle, dans le sens direct si $\varepsilon = +1$, avec une vitesse angulaire ω_i

De plus, si $\vec{\xi}$ représente la projection de $\vec{z}_1$ sur le plan Oxy, on a :

$$\vec{\xi} = \beta \vec{x} - \alpha \vec{y} \quad \text{et} \quad \vec{OG} = \lambda_1 \vec{\xi}$$



11,3,3 Etude des oscillations forcées

Le système général s'écrit :

$$MX'' + GX' + KX = F$$

On pose $F = \text{Re} (F e^{j\omega t})$ avec $F = F_1 \cos \omega t + F_2 \sin \omega t$

$$\text{On a} \quad (a - m\omega^2)(x) - b(\beta) = (F_x)$$

$$(a - m\omega^2)(y) + b(\alpha) = (F_y)$$

$$b(y) + (c - A\omega^2)(\alpha) + JCR\omega(\beta) = (\Gamma_\alpha)$$

$$-b(x) - JCR\omega(\alpha) + (c - A\omega^2)(\beta) = (\Gamma_\beta)$$

A) Cas particulier

$$a - m\omega^2 = 0$$

si $b = 0$ (X) tend vers l'infini : résonance, sauf si $F_x = F_y = 0$
qui donne $\alpha = \beta = 0$

si $b \neq 0$ (X) est parfaitement déterminé

B) Cas général

$a - m\omega^2 \neq 0$ En éliminant (x) et (y) on obtient :

$$-JY_2(\alpha) + Y_1(\beta) = b(F_x) + (a - m\omega^2)(\Gamma_\beta)$$

$$Y_1(\alpha) + JY_2(\beta) = -b(F_y) + (a - m\omega^2)(\Gamma_\alpha)$$

Il y aura résonance pour $\Delta = 0$, soit $Y_1^2 = Y_2^2$. Il faut donc que ω coïncide avec l'une des 4 fréquences propres.

REMARQUE : Si $Y_1 = \varepsilon Y_2$, on a 2 équations qui ont même 1^{er} membre. Si elles ont même 2^{ème} membre, il y a indétermination.

11,3,4 Action de forces tournantes, d'intensité constante

Soit $\phi_n \begin{vmatrix} p \\ q \\ P \\ Q \end{vmatrix}$ un système de forces liées à des axes $\vec{r}$, tournant à la vitesse n autour de $\vec{z}$.

La position du rotor par rapport à ses axes est donnée par

$$N = S_n X$$

Avec S_n = matrice S avec $\varphi = R t$ remplacée par $-nt$

A) Dans les axes fixes, on a $F = S_n^{-1} \phi_n$ et on obtient :

$$F = \begin{vmatrix} p \cos nt - q \sin nt \\ p \sin nt + q \cos nt \\ P \cos nt - Q \sin nt \\ P \sin nt + Q \cos nt \end{vmatrix} \text{ soit, avec } (F) = R e (F e^{-Jnt}) \begin{cases} (F_x) = p + Jq \\ (F_y) = q - Jp \\ (\Gamma_\alpha^y) = P + JQ \\ (\Gamma_\beta) = Q - JP \end{cases}$$

Mais dans ce cas : $(F_x) = J(F_y)$ et $(\Gamma_\alpha) = J(\Gamma_\beta)$

$$\begin{cases} -JY_2(\alpha) + Y_1(\beta) = b(F_x) + (a - m\omega^2)(\Gamma_\beta) \\ + Y_1(\alpha) + JY_2(\beta) = -b(F_y) + (a - m\omega^2)(\Gamma_\alpha) \end{cases}$$

Pour $\varepsilon = +1$ et en la multipliant par $-J$, la 2^{ème} équation s'écrit :

$$\begin{aligned} -JY_2(\alpha) + Y_1(\beta) &= b J(F_y) - (a - m\omega^2) J(\Gamma_\alpha) \\ &= b(F_x) + (a - m\omega^2)(\Gamma_\beta) \end{aligned}$$

Les 2 équations sont identiques . Il y a indétermination . Donc résonance uniquement pour $\varepsilon = -1$:
 $Y_1 = -Y_2$.

B) Calcul direct dans les axes n

On a $K_n N = \phi_n$: Equation d'équilibre

avec $K_n = S_n^{-1} M S_n'' + S_n^{-1} G S_n' + S_n^{-1} K S_n$

et $S_n'' = -n^2 S_n$ S_n équivaut à une rotation de $-nt$
 $S_n' = -n S_n' (n + \frac{\pi}{2})$ S_n^{-1} " " " de $+nt$

d'où $S_n^{-1} M S_n'' = -n^2 M$

Pour $S_n^{-1} G S_n'$ on a , pour les paramètres (α, β)

$G = \begin{vmatrix} 0 & Cr \\ -Cr & 0 \end{vmatrix}$ équivalent à une rotation $+\frac{\pi}{2}$ et une homothétie

d'où $S_n^{-1} G S_n' = \text{rot}(nt + \frac{\pi}{2}) + [\text{homothétie} + \text{rot.}(\frac{\pi}{2})] + [\text{rot} + nt]$
 $= \text{homothétie}$

$$= n \begin{vmatrix} Cr & 0 \\ 0 & Cr \end{vmatrix}$$

Enfin :

$$S_n^{-1} K S_n = K \quad (S^{-1} K_E S = K_E, \text{ dans le cas du rotor parfait, après simplification})$$

$$\text{d'où } K_n = \begin{vmatrix} a-mn^2 & 0 & 0 & -b \\ 0 & a-mn^2 & b & 0 \\ 0 & b & c+CRn-An^2 & 0 \\ -b & 0 & 0 & c+CRn-An^2 \end{vmatrix}$$

$$K_n N = \phi_n$$

On dira qu'il y a résonance dans les axes $\vec{n}$, si le déterminant de $K_n = 0$

$$[(a-mn^2)(c+CRn-An^2)-b^2]^2 = 0$$

$$[(a-mn^2)(c-An^2)-b^2 + CRn(a-mn^2)]^2 = 0$$

$$Y_{\vec{n}} + Y_{\vec{n}} = 0$$

Résonance pour $Y_n^1 = -Y_n^2$ $n > 0$ dans le sens de R : 2 racines $Y_1 = -Y_2$
 $n < 0$ dans le sens opposé à R : 2 racines $Y_1 = +Y_2$

Exemple : cas d'excitation par roulement à billes inégales ,
 par film d'huile avec $n = \frac{R}{2}$
 par balourd avec $n = R$

II,3,5 Excitation par Mouvement périodique du support

Soit X_E le mouvement imposé.

La force élastique de rappel = $-K(X - X_E)$

L'équation générale s'écrit :

$$MX'' + GX' + KX = KX_E$$

Il y aura résonance si la fréquence de déplacement est égale à une fréquence de résonance propre .

Exemple : $d \cos \omega t$: déplacement sinusoïdal parallèle à $\vec{x}$

$$KX_E = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} d \cos \omega t$$

On a, à partir des équations II,3,2,2 B

$$-J Y_2(\alpha) + Y_1(\beta) = b(F_x) + (a - m\omega^2) (\Gamma_\beta)$$

$$Y_1(\alpha) + J Y_2(\beta) = -b(F_y) + (a - m\omega^2) (\Gamma_\alpha)$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{m\omega^2 b Y_2}{Y_2^2 - Y_1^2} d \sin \omega t \\ \beta = -\frac{m\omega^2 b Y_1}{Y_2^2 - Y_1^2} d \cos \omega t \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{m\omega^2} \cos \omega t + \frac{b}{a - m\omega^2} \beta \\ y = \frac{-b}{a - m\omega^2} \alpha \end{cases}$$

$\vec{\zeta}$ étant la projection de $\vec{z}_1$ sur Oxy, on a :

$$\vec{OG} = \frac{b}{a-m\omega^2} \vec{\xi} + \frac{ad\cos\omega t}{a-m\omega^2} \vec{x}$$

$\vec{\xi} = \beta \vec{x} - \alpha \vec{y}$ G décrit une ellipse dans le sens + ou - suivant la valeur de ω . ($\vec{\xi}$ aussi)

11,4 : - Equation dans les axes liés au rotor :

$$M_1 U'' + G_1 U' + K_1 U = \phi_m + \phi_d$$

En l'absence de forces extérieures $\phi_d = 0$, on peut chercher les positions d'équilibre relatif dans les axes mobiles du rotor. Il faut pour cela que le déterminant Δ_1 de K_1 soit positif. $U'' = U' = 0$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 - mR^2 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & a_2 - mR^2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & c_2 + (C-B)R^2 & -FR^2 \\ -b_1 & 0 & -FR^2 & c_1 + (C-A)R^2 \end{vmatrix}$$

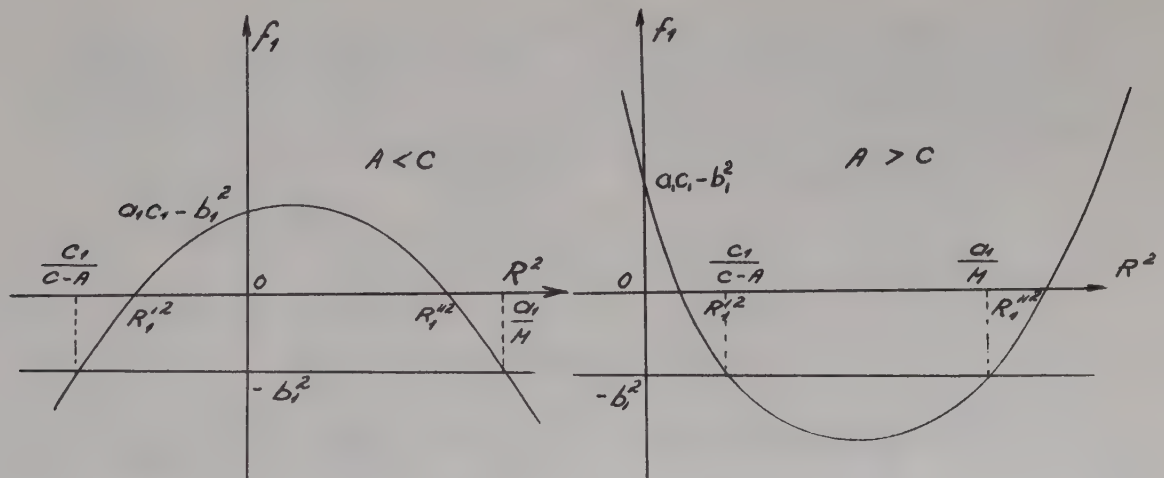
$$\Delta_1 = \{ (a_1 - mR^2) [c_1 + (C-A)R^2] - b_1^2 \} \{ (a_2 - mR^2) [c_2 + (C-B)R^2] - b_2^2 \}$$

$$- (a_1 - mR^2)(a_2 - mR^2)F^2R^4$$

$$\Delta_1 = f_1(R^2) f_2(R^2) - g_1(R^2) g_2(R^2) F^2 R^4$$

L'équilibre est instable si $\Delta_1 \leq 0$

La fonction f_1 varie en fonction de R^2 comme l'indiquent les figures :



Si $A < C$ f_1 est positif pour $0 < R^2 < R_1^{*2}$

Si $A > C$ $-f_1$ est positif pour $R_1^{*2} < R^2 < R_1^{**2}$ ($\frac{c_1}{C-A}$ et $\frac{a_1}{m}$ se trouvent compris entre R_1^{*2} et R_1^{**2})

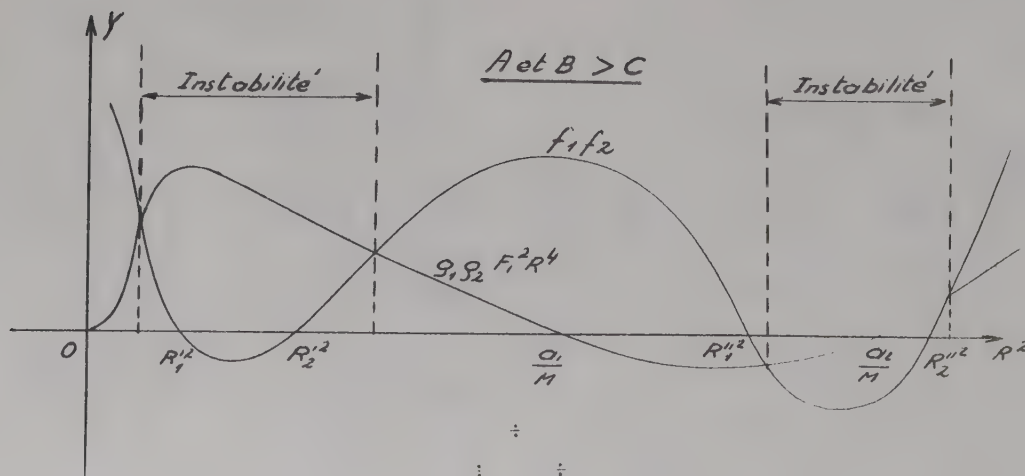
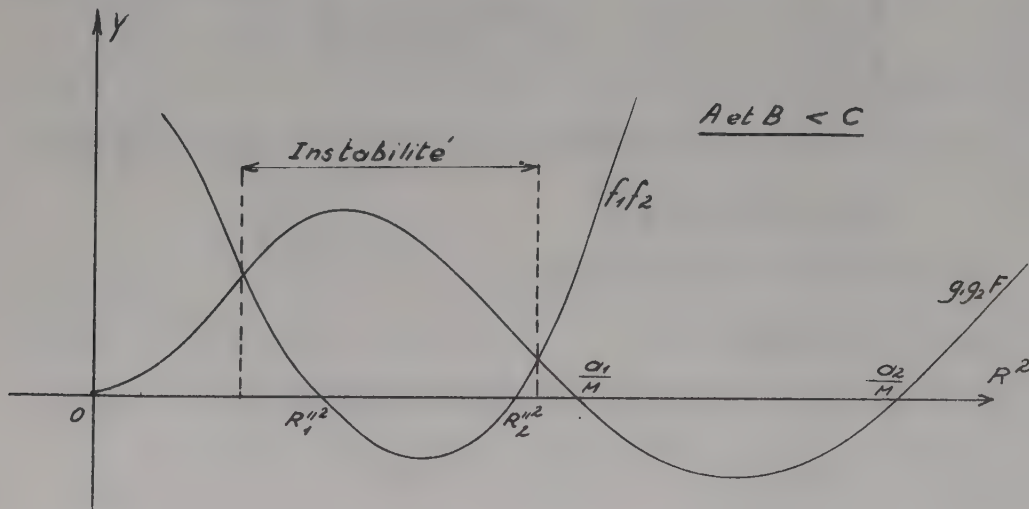
Il est alors facile de voir que l'équilibre sera instable si la vitesse de rotation se trouve dans certaines zones dépendant, en particulier, des valeurs relatives de A, B et C d'une part, et R_1^* , R_1^{**} , R_2^* et R_2^{**} , $\frac{a_1}{M}$ et $\frac{a_2}{M}$ d'autre part.

Dans le cas particulier où $F = 0$:

Si A et B sont inférieurs à C, il y a instabilité si R est compris entre R_1^* et R_2^* ,

Si A et B sont supérieurs à C, il y a 2 zones d'instabilité : R compris entre R_1^* et R_2^* ,

La présence d'un terme F non nul modifie les zones d'instabilité, comme le montrent les figures pour 2 exemples.



Chapitre III

FREQUENCES PROPRES DE VIBRATIONS D'UN ROTOR PARFAIT

III,1 Etude théorique des solutions de l'équation (II,3,2,B)

$$[(a - m\omega^2)(c - A\omega^2) - b^2]^2 - (a - m\omega^2)^2 C^2 R^2 \omega^2 = 0$$

On pose $Y_1 = (a - m\omega^2)(c - A\omega^2) - b^2$

$$Y_2 = (a - m\omega^2)CR\omega$$

Pour un disque en rotation à l'extrémité d'une tige cylindrique, les coefficients a , b , c et C sont connus. A sera considéré comme lié à la valeur de la masse m par la relation Y_1 , car il est difficilement accessible directement (cf Chap. I). Il sera donc, pour la suite, déterminé à partir de l'équation Y_1 , les racines de l'équation étant connues expérimentalement avec une très grande précision. Les solutions de l'équation générale seront alors données graphiquement par l'intersection des courbes Y_1 et $+Y_2$ et $-Y_2$.

III,1,1 - Etude de Y_1

C'est l'équation obtenue en négligeant le couplage gyroscopique ou pour une rotation nulle. L'étude des fréquences propres est identique à celle du 1^{er} chapitre. Pour l'application pratique, on posera l'inertie $A = ml^2 \alpha$ et α sera le paramètre. Pratiquement, α est très inférieur à 1. En effet, si l'on néglige le couplage flexion torsion, A est égal à $\frac{C}{2}$, C étant l'inertie du disque par rapport à son axe de rotation. Si l'on pose $C = m\rho^2$, ρ rayon de giration, on a

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{l^2}$$

ρ sera, au maximum, égal à $\frac{l}{2}$ et, dans les cas réels, bien inférieur.

L'équation Y_1 devient :

$$Y_1 = m A \omega^4 - \omega^2 (\alpha A + C m) + ac - b^2$$

Si I désigne l'inertie de flexion de la tige par rapport à l'un de ses diamètres, l sa longueur, E le module d'Young, Y_1 devient :

$$Y_1 = \alpha m l^2 \omega^4 - \omega^2 \left[\alpha m l^2 \frac{12EI}{l^3} + \frac{4EI}{l} m \right] + \frac{12E^2 l^2}{l^4}$$

Les racines de cette équation sont les pulsations propres du système, sans rotation.

En posant

$$\omega^2 \frac{m l^3}{EI} = \mu$$

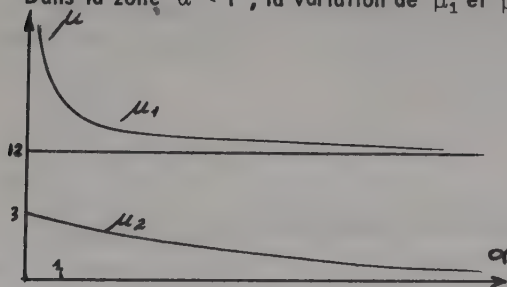
on a :

$$\mu^2 - \mu \left(12 + \frac{4}{\alpha} \right) + \frac{12}{\alpha} = 0$$

d'où :

$$\mu = \left(6 + \frac{2}{\alpha} \right) \pm \sqrt{36 + \frac{12}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^2}}$$

Dans la zone $\alpha < 1$, la variation de μ_1 et μ_2 en fonction de α est très rapide (cf courbe 2).



La partie intéressante dans les cas expérimentaux étant celle où $\alpha \ll 1$, il faudra effectuer les calculs pour avoir une précision acceptable.

III,1,2 Etude des racines de $Y_1 + Y_2 = 0$

$$Y_1 = mA \omega^4 - \omega^2 (aA + cm) + ac - b^2$$

$$Y_2 = (a - m \omega^2) CR \omega$$

Soient ω_1^2 et ω_2^2 les racines de Y_1

$$Y_1 = mA (\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2)$$

$$Y_2 = m CR \omega \left(\frac{a}{m} - \omega^2 \right)$$

Posons : $\frac{\omega}{\omega_1} = s \quad \frac{\omega_1}{\omega_1} = s_1 = 1 \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = s_2 \quad \frac{a}{m \omega_1^2} = \frac{12EI}{m l^3 \omega_1^2} = s_3^2$

On a : $Y_1 = \omega_1^4 mA (s^2 - 1) (s^2 - s_2^2)$

$$Y_2 = m \frac{CR \omega_1^4}{\omega_1} (s_3^2 - s^2) s$$

A) $R = C^{te}$ Vitesse de rotation constante

Les pulsations propres sont donc données par

$$\omega_1^4 mA (s^2 - 1) (s^2 - s_2^2) = \pm m C \frac{R}{\omega_1} \omega_1^4 (s_3^2 - s^2) s$$

ou
$$(s^2-1)(s^2-s_2^2) = \pm \frac{C}{A} \cdot \frac{R}{\omega_1} (s_3^2-s^2) s$$

Une construction graphique de ces deux fonctions, pour différentes valeurs de $\frac{C}{A}$ et pour $R = \omega_1$, nous donne l'allure générale de la variation des racines quand la forme du rotor change. Nous prenons $\alpha = \frac{1}{3}$ (cf. courbes 3) — $\alpha = \frac{1}{10}$ (cf courbes 4) — $\alpha = \frac{1}{30}$ et $\frac{1}{50}$ (cf. courbes 5, 6 et 7)

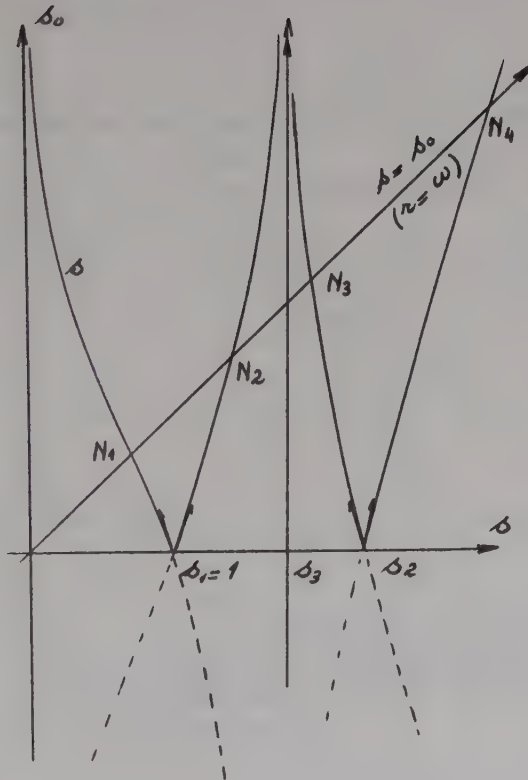
(détail des calculs en Annexe -Chap. III)

B) R = Vitesse de rotation variable

α) On étudie les variations des racines en fonction de R'.

En posant $s_0 = \frac{R}{\omega_1}$ et en résolvant en s_0 , on a :

$$s_0 = \frac{(s^2-s_1^2)(s^2-s_2^2)}{\pm \frac{C}{A}(s_3^2-s^2)s} \quad \text{avec } s_0 > 0$$



La représentation graphique nous montre l'existence de 4 racines, en général distinctes, et à distance finie.

Pour $r = \omega$, soit $s_0 = s$, on obtient les fréquences de résonance par autoexcitation :

$$(s^2-1)(s^2-s_2^2) = \pm \frac{C}{A} (s_3^2-s^2) s^2$$

équation du 4^{ème} d'o qui a 4 racines, comme précédemment, en général distinctes et à distance finie.

Calcul des tangentes aux points $s_0 = 0$

soit pour $s = s_1$ soit $s = s_2$

$$s_0 = \frac{U}{V} = \frac{(s^2-s_1^2)(s^2-s_2^2)}{\pm \frac{C}{A}(s_3^2-s^2)s}$$

$$\frac{ds_0}{ds} = \frac{U_s V - V_s U}{V^2} \quad \text{avec pour } s=s_1 \text{ ou } s=s_2 \quad U = 0$$

$$\frac{ds_0}{ds}(s_0=0) = \frac{U'_s(s=s_0)}{V_s(s=s_0)}$$

$$U'_s = 2s [(s^2 - s_1^2) + (s^2 - s_2^2)]$$

soit : pour $s = s_1$ $\frac{ds_0}{ds} = \pm \frac{2A}{C} \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_3^2 - s_1^2}$

pour $s = s_2$ $\frac{ds_0}{ds} = \pm \frac{2A}{C} \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_3^2 - s_2^2}$

β) Pour chaque valeur de R , les fréquences propres sont données par les solutions de l'équation du cas A : $Y_1 \pm Y_2 = 0$, soit :

$$(s^2 - 1)(s^2 - s_2^2) = \pm \frac{C}{A} \frac{R}{\omega_1} (s_3^2 - s^2)s$$

On peut, pour un rotor déterminé, avoir l'allure des variations des racines correspondant aux variations de R .

Un cas particulier important est celui où R varie comme ω_1 qui nous donne les fréquences autoexcitées.

On a donc construit sur le même graphique que pour le cas A la courbe $Y_3 = \pm (s_3^2 - s^2)s^2$ correspondant à $R = \omega$.

C) Solutions graphiques

On prend $\frac{C}{A} = 1$ et on construit :

$$Y_1 = (s^2 - 1)(s^2 - s_2^2)$$

$$Y_2 = \pm (s_3^2 - s^2)s \quad \text{avec } R = \omega_1$$

$$Y_3 = \pm (s_3^2 - s^2)s^2 \quad \text{avec } R = \omega$$

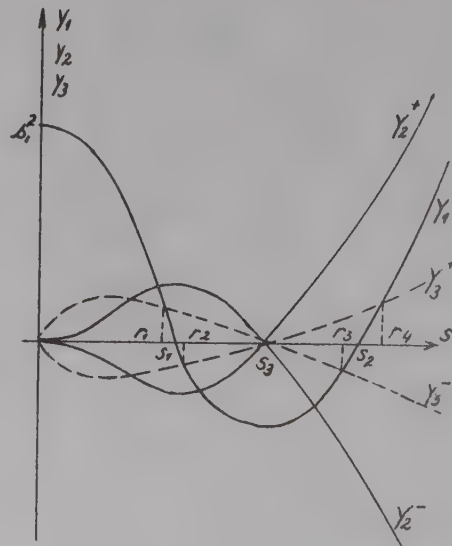
Pour $\alpha = \frac{1}{3}$ les fréquences autoexcitées les plus basses

valent $r_1 = 0,8 \omega_1$
 $r_2 = 1,37 \omega_1$

Pour $\alpha = \frac{1}{10}$ on a $r_1 = 0,92 \omega_1$
 $r_2 = 1,15 \omega_1$

Pour $\alpha = \frac{1}{30}$ on a $r_1 = 0,98 \omega_1$
 $r_2 = 1,15 \omega_1$

Enfin $\alpha = \frac{1}{50}$ et $r_1 = 0,98 \omega_1$
 $r_2 = 1,022 \omega_1$



III,2 Vérification expérimentale

III,2,1 Calcul des fréquences propres de résonance en fonction de R

Pour un disque et une tige donnés, les termes a , b , c et C sont calculables directement. Mais nous avons vu que A et m ne nous sont pas accessibles avec précision à partir des dimensions géométriques du système. Nous les considérerons comme liés par l'équation étudiée au chapitre I.

$$(a - m\omega^2)(c - A\omega^2) - b^2 = 0$$

Posons $\omega^2 = \lambda$ et soit alors λ_1 et λ_2 les racines de cette équation, que nous supposons connues et qui seront effectivement déterminées expérimentalement et mesurées avec précision.

Nous avons :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{Aa + cm}{Am} \quad (1)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{ac - b^2}{Am} \quad (2)$$

et on pose

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \nu \quad (3) \quad \text{et } A = \alpha m l^2$$

On résoud alors le système en α , puis on calcule m

$$(3)+(1) \quad \lambda_2(1 + \nu) = \frac{Aa + cm}{Am} \quad (4)$$

$$(3)+(2) \quad \nu \lambda_2^2 = \frac{ac - b^2}{Am} \quad (5)$$

$$(4)+(5) \quad \left[\frac{Aa + cm}{Am} \right]^2 \frac{1}{(1 + \nu)^2} = \frac{1}{\nu} \frac{ac - b^2}{Am}$$

$$\text{On a :} \quad a = \frac{12EI}{l^3} \quad b = \frac{6EI}{l^2} \quad c = \frac{4EI}{l}$$

$$\text{soit } ac - b^2 = \frac{12E^2 l^2}{l^4} \quad \text{et en posant } R = \frac{(1 + \nu)^2}{\nu}$$

$$R = \frac{\left[\frac{\alpha m \cdot 12EI}{l} + \frac{m \cdot 4EI}{l} \right]^2}{\alpha m^2 l^2 \frac{12(EI)^2}{l^4}} = \frac{12}{\alpha} \left[\frac{1}{3} + \alpha \right]^2$$

d'où l'équation déterminant α :

$$\alpha^2 + \alpha \left[\frac{2}{3} - \frac{R}{12} \right] + \frac{1}{9} = 0 \quad (\text{III,2,1})$$

On a 2 racines dont seule la plus petite est acceptable physiquement. On tire alors m de l'équation (2)

$$m^2 = \frac{(ac - b^2)}{\alpha \lambda_1 \lambda_2 l^2}$$

On peut alors calculer les fréquences propres pour une vitesse de rotation quelconque, en résolvant l'équation $Y_1 = Y_2$ dont tous les termes sont connus.

III,2,2 Calcul des pentes des tangentes aux courbes $s_0 = f(s)$ pour $s_0 = 0$

C'est en effet dans cette région que seront obtenus les points expérimentaux qui constitueront la vérification pratique de la théorie.

On avait :

$$\frac{ds_0}{ds} (s_0=0) = \pm \frac{2A}{C} \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_3^2 - s_1^2} \quad \text{pour } s = s_1$$

soit, en fonction des fréquences, N fréquence de résonance «dynamique» N_1 et N_2 fréquences de résonance «statique», n fréquence de rotation

$$s_0 = \frac{R}{\omega_1} = \frac{n}{N_1} \quad s = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{N}{N_1} \quad s_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad s_3 = \frac{12EI}{ml^3 \omega_1^2} = \frac{12EI}{ml^3 4\pi^2 N_1^2}$$

d'où :

$$\frac{dN}{dn} \Big|_{n=0} = \pm \frac{C}{2A} \frac{\frac{12EI}{4\pi^2 ml^3 N_1^2} - 1}{1 - \frac{N_2^2}{N_1^2}} \quad \text{pour } N = N_1$$

$$\frac{dN}{dn} \Big|_{n=0} = \pm \frac{C}{2A} \frac{\frac{12EI}{4\pi^2 ml^3 N_1^2} - \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2}{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 - 1} \quad \text{pour } N = N_2$$

Expérimentalement on obtient directement avec précision la période des résonances statiques. Soit T_1 et T_2 ces périodes et en posant

$$U = \frac{12EI}{4\pi^2 ml^3} \quad \text{et } C = m \rho^2$$

$$\frac{dN}{dn} \Big|_{n=0} = \pm \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\rho}{l}\right)^2 \frac{U \cdot T_1^2 - 1}{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} \quad \text{pour } N = N_1$$

$$\frac{dN}{dn} \Big|_{n=0} = \pm \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\rho}{l}\right)^2 \frac{U \cdot T_1^2 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 - 1}$$

III,3 Application

III,3,1 Disque 1

masse $M = 161 \text{ g.}$
 Diamètre = 190mm
 épaisseur = 2mm
 tige longueur = 425mm
 diamètre = 7mm

Les périodes propres, le disque ne tournant pas, étaient :

$$T_1 = 96.500 \mu\text{s}$$

$$T_2 = 11.800 \mu\text{s}$$

On résoud l'équation III,2,1

$$\alpha^2 + \alpha \left(\frac{2}{3} - \frac{R}{12} \right) + \frac{1}{9} = 0$$

$$R = \frac{(1+v)^2}{v} \quad \text{avec} \quad v = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \text{et} \quad \lambda = \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\text{soit} \quad v = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \quad \text{et} \quad R = \left[\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_2}{T_1} \right]^2$$

$$\text{ici :} \quad \frac{T_1}{T_2} = 8,177 \quad \frac{T_2}{T_1} = 0,1222 \quad \text{d'où} \quad R = 70,89$$

On a donc :

$$\alpha^2 + \left[\frac{2}{3} - \frac{70,89}{12} \right] \alpha + \frac{1}{9} = 0$$

dont la racine la plus petite est $\alpha_2 = 0,0213$.

On en déduit la valeur de la masse équivalente :

$$m'^2 = \frac{(ac - b^2)}{\alpha \lambda_1 \lambda_2 l^2} = \frac{12 E^2 l^2}{16 (4\pi^2)^2} \frac{T_1^2 T_2^2}{\alpha}$$

$$m' = 207 \text{ g.}$$

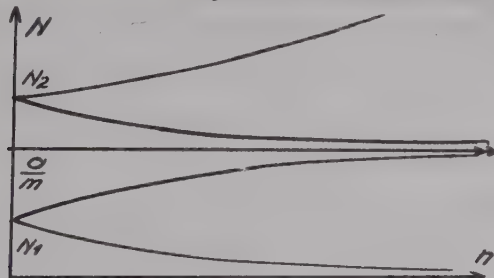
d'où

$$A = \alpha m l^2 = 7960 \text{ g. cm}^2$$

On a d'autre part :

$$C = m \rho^2 = \frac{\pi R^2}{2} = 7260 \text{ g. cm}^2$$

On peut alors calculer la pente des tangentes aux courbes $N = f(n)$ pour $n=0$. Expérimentalement, seules, les valeurs des fréquences de résonance autour de $N = N_1$ ont été atteintes avec précision et sont donc seules comparables aux valeurs théoriques.



On a donc pour $N = N_1$

$$\frac{dN}{dn} \Big|_{n=0} = \pm \frac{C}{2A} \frac{UT_1^2 - 1}{1 - \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2}$$

$$U = \frac{12 EI}{4 \pi^2 m l^3} = 4,51 \text{ CGS}$$

$$\frac{dN}{dn} \neq \pm 2,19 \cdot 10^{-2} \pm 0,610^{-2}$$

(cf calcul et précision en Annexe -Chap. II)

Les valeurs des pentes mesurées sur le graphique des points expérimentaux_ (cf fig. 8) sont :

$$\text{pente positive} = 2,06 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{pente négative} = -1,71 \cdot 10^{-2}$$

III,3,2 Disque 2

$$\text{masse } M = 283 \text{ g}$$

$$\text{diamètre} = 260 \text{ mm}$$

$$\text{épaisseur} = 2 \text{ mm}$$

$$\text{Tige diamètre} = 7 \text{ mm}$$

$$\text{longueur} = 474 \text{ mm}$$

Les périodes propres mesurées

$$\text{étaient : } T_1 = 136 \cdot 300 \mu s$$

$$T_2 = 20 \cdot 300 \mu s$$

En opérant comme précédemment, on trouve :

$$\alpha = 0,035$$

Soit une masse équivalente $m' = 284 \text{ g}$

$$\text{d'où } A = 22 \cdot 250 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

$$\text{et par ailleurs : } C = 23 \cdot 850 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

La pente théorique des tangentes aux courbes $N = f(n)$ est égale à

$$\frac{dN}{dn} = \pm 4,08 \cdot 10^{-2} \pm 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ pour } N = N_1$$

Expérimentalement, on trouve :

$$\text{pente positive} = 3,82 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{pente négative} = -3,3 \cdot 10^{-2}$$

On a pu atteindre expérimentalement les points correspondant à la partie décroissante de la courbe aux environs de la fréquence la plus élevée. On obtient comme valeur de la pente négative de la tangente au point $N = N_2$:

$$\text{pente négative} = -4,8 \cdot 10^{-1}$$

Le calcul de la valeur théorique s'écrit :

$$\frac{dN}{dn} = \pm \frac{C}{2A} \frac{UT_1^2 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 - 1} \quad \text{pour } N = N_2$$

$$\text{soit } \frac{dN}{dn} = \pm 4,9 \cdot 10^{-1} \pm 0,510^{-1} \quad \text{pour } N = N_2$$

D'autre part, le calcul des fréquences autoexcitées autour de $N = N_1$, avec $C \neq A$ et $\alpha = \frac{1}{30}$ donne, par solution graphique, des résultats très voisins de ceux, semi expérimentaux, obtenus

aux intersections de la droite de pente 1 et des courbes expérimentales $N = f(n)$ (cf fig. 9) .
On trouve des périodes pour les résonances :

$$T_1 = 141.800 \mu s$$

$$T_2 = 130.900 \mu s$$

Par mesure directe, les périodes propres sont trouvées égales à

$$T_1 = 141.500 \mu s$$

$$T_2 = 131.000 \mu s$$

Enfin, sur la courbe $N = f(n)$, au voisinage de $N = N_2$, on trouve une fréquence autoexcitée de valeur $N_3 = \frac{1}{T_3} = 10^6 / 33.800 \text{ Hz}$ et dans le «spectre» des fréquences propres, on trouve une résonance de période voisine de $33.800 \mu s$

III,3,3 Disque 3

Masse $M = 285 \text{ g}$

diamètre = 30mm

épaisseur = 55mm

tige diamètre = 7mm

longueur = 444mm

Les périodes propres de résonance
« statique » sont

$$T_1 = 137.240 \mu s$$

$$T_2 = 10.388 \mu s$$

Les mêmes calculs que précédemment donnent :

$$R = 176,54 \quad \text{et} \quad \alpha = 8.10^{-3}$$

d'où la valeur de la masse équivalente :

$$m' = 318 \text{ g}$$

$$\text{et} \quad A = 5.460 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

$$C = 321 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

La pente des tangentes au voisinage de $N = N_1$ pour les courbes $N = f(n)$ ont pour valeur :

$$\frac{dN}{dn}_{n=0} = \pm 5,31 \cdot 10^{-4} \pm 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ pour } N = N_1$$

Expérimentalement, on trouve :

$$\text{pente positive} = 5,56 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{pente négative} = 5,51 \cdot 10^{-4}$$

Enfin le calcul théorique de la 3^e fréquence donne pour période propre : $T = 10.800 \mu s$. Expérimentalement on a une résonance aux environs de $12.000 \mu s$

III,3,4 Plaque rectangulaire

Masse M	= 308,5g	« Statiquement on trouve comme périodes propres de
Longueur	= 225mm	résonance, dans le sens du grand axe :
Largeur	= 105mm	$T_1 = 142.450 \mu s$
épaisseur	= 2mm	$T_2 = 19.876 \mu s$
tige diamètre	= 4mm	
longueur	= 470mm	Dans le sens du petit axe :
		$T_1 = 140.430 \mu s$
		$T_2 = 12.020 \mu s$

Dans le sens du grand axe, la fréquence des oscillations propres peut être considérée comme liée à la rotation par les équations précédentes et on trouve :

$$\text{pour } \alpha = 0,029$$

$$\text{et pour la masse équivalente } = 322 \text{ g.}$$

$$\text{et } A = 21.020 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

$$\text{d'autre part, l'inertie } C = 15.830 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

d'où la pente des tangentes aux courbes $N = f(n)$ pour la direction considérée :

$$\frac{dN}{dn} \Big|_{n=0} = 2,46.10^{-2} \pm 0,7.10^{-2} (N = N_1)$$

Les mêmes calculs effectués pour les oscillations dans le sens du petit axe donnent :

$$\alpha = 0,01$$

$$\text{et la masse équivalente } m' = 346 \text{ g.}$$

$$\text{d'où } A = 7.650 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

$$\text{et on a } C = 15.830 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

On en déduit :

$$\frac{dN}{dn} \Big|_{n=0} = 2,21 \cdot 10^{-2} \pm 0,6 \cdot 10^{-2} (N' = N_1')$$

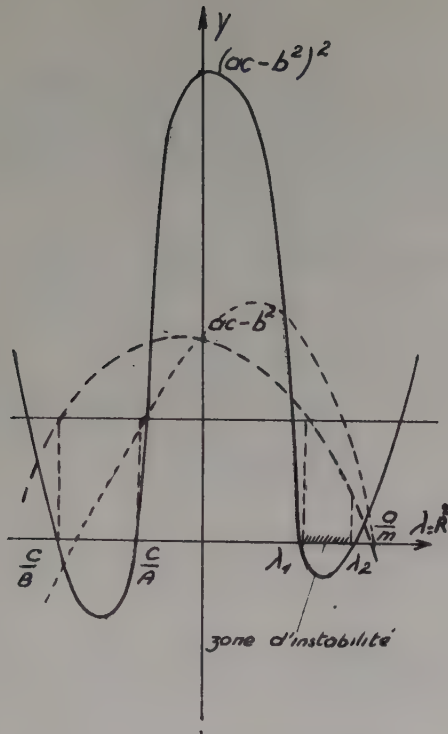
Expérimentalement (cf fig. 10), on trouve :

$$\text{pente positive : } + 2,05.10^{-2}$$

$$\text{pente négative : } - 2,15.10^{-2}$$

L'étude de la stabilité dans les axes mobiles pour la plaque rectangulaire conduit à la condition suivante : le mouvement est stable si :

$$\{ (a - mR^2)(C + BR^2) - b^2 \} \{ (a - mR^2)(C + AR^2) - b^2 \} > 0$$



avec $A+B=C$

En supposant $A > B$ on a le cas de figure :

Graphiquement, on voit que l'on a une zone d'instabilité entre les 2 racines voisines de $\frac{a}{M}$

Expérimentalement, ces 2 racines étaient égales respectivement à 7,01 Hz et 7,11 Hz et la zone d'instabilité observée s'étendait de 6,92 Hz à 7,8 Hz.

III,4 Influence du couplage avec la table sur les fréquences propres statiques = système à 3d^e de liberté .

Nous utiliserons la méthode de calcul graphique des fréquences des systèmes en chaîne simple qui permet une discussion facile des variations des fréquences propres en fonction du degré de liberté supplémentaire .

En écrivant les équations en commençant par l'extrémité libre, le système d'équations donnant les solutions sinusoïdales en réponse à une excitation sinusoïdale est de la forme :

$$\begin{bmatrix} K_1 - \lambda M_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 - \lambda M_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 + K_3 - \lambda M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

si la force est appliquée au 1^{er} système par exemple avec $\lambda = \omega^2$, ω , pulsation d'excitation,

L'étude du système à 2 d° de liberté nous a donné les coefficients correspondant à K_1 et $K_1 + K_2$ et le coefficient de couplage dans le cas d'une rotation couplée avec un déplacement et les solutions correspondantes, sous la forme :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & -\lambda I & -b \\ -b & c - \lambda M \end{vmatrix} = 0 \quad \text{avec} \quad a = \frac{4EI}{I} \quad c = \frac{12EI}{I^3}$$

$$b = \frac{6EI}{I}$$

Soient λ_1 et λ_2 les racines, K_2 la raideur de l'axe en flexion pure et K_3 la raideur des pieds de la table, qui se déplace horizontalement.

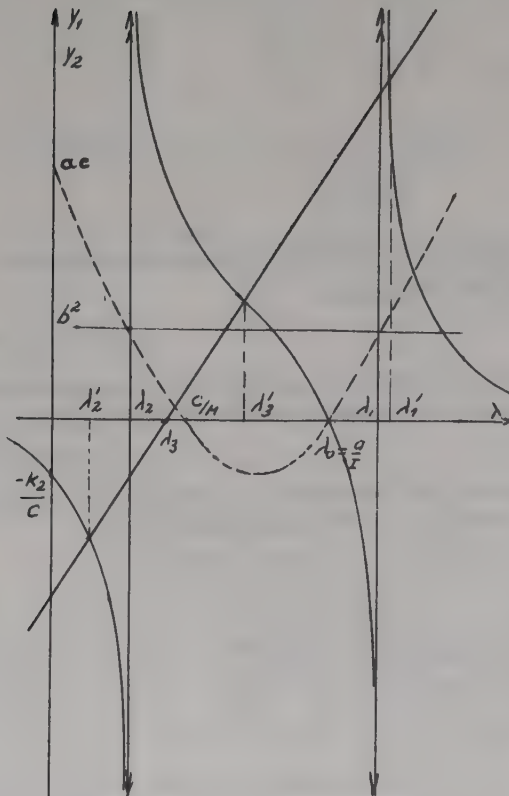
En développant Δ on a :

$$A = (K_2 + K_3 - M_3 \lambda) \Delta_2 - K_2^2 (a - \lambda I)$$

Posons :

$$Y_1 = \lambda M_3 - (K_2 + K_3)$$

$$Y_2 = \frac{K_2^2 (\lambda I - a)}{\Delta_2} = \frac{K_2^2}{M_2} \frac{(\lambda - \lambda_0)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}$$



L'intersection de Y_1 et Y_2 nous donne les valeurs des pulsations propres (cf fig)

En se plaçant dans le cas particulier qui nous intéresse où nous savons que $\lambda_0 < \lambda_1$ et voisin, et supérieur à λ_2 :

$$\text{pour } \lambda = 0 \quad Y_2 = \frac{-K_2^2 a/I}{M_2 \frac{ac}{M_2 I}}$$

soit :

$$Y_2 = -\frac{K_2^2}{c}$$

$$Y_1 = -(K_2 + K_3)$$

et on a :

$$\lambda_3 = \frac{K_2 + K_3}{M_3} \neq \frac{K_3}{M_3}$$

légèrement supérieur à λ_2 .

Le graphique montre que l'existence du 3^{ème} degré de liberté donne un écartement supplémentaire des fréquences du disque. Mais l'influence dans le cas expérimental est très faible car la table présente une masse et une raideur très importantes par rapport aux termes correspondants pour le disque. On a une droite de pente très forte et λ'_1 , λ'_2 , λ'_3 sont très voisins de λ_1 , λ_2 , λ_3 .

Application au cas du disque 1

$$a = \frac{4EI}{l} = \frac{4.210^4 \pi . 7^4 . 10^6}{425.64} = 22,2.10^8 \text{ dynes/cm/rad.}$$

$$c = \frac{12EI}{l^3} = 3,696.10^8 \text{ dynes/cm}$$

$$b = \frac{6EI}{l^2} = 7,85.10^7 \text{ dynes}$$

$$I = \frac{MR^2}{4} = 3,8 \cdot 10^3 \text{ g./cm}^2$$

$K_2 =$ raideur en flexion

$$= \frac{3EI}{l^3} = 0,924.10^8 \text{ dynes/cm}$$

$K_3 =$ raideur de la table

$$= 2,6 \cdot 10^7 \text{ dynes/cm}$$

$$M = 161 \text{ g.}$$

$$\mu \text{ masse de la tige} = 128 \text{ g. } \frac{\mu l^2}{105} = 2,210^3$$

$$\text{D'où : } \lambda_0 = \frac{a}{l + \frac{\mu l^2}{105}} = 3,7.10^5$$

$$\lambda'_0 = \frac{c}{M + \frac{1}{3}\mu} = 1,81.10^4$$

Avec $ac = 84,410^{14}$ et $b^2 = 61,810^{14}$ et en considérant la corde pour l'arc de parabole de $\{\frac{c}{M}, 0\}$ à $\{0, ac\}$ on trouve :

$$\lambda_1 = 4,85.10^3$$

$$\lambda_2 = 3,83.10^5$$

$$\text{avec } \lambda_3 = 8,4.10^3$$

$$\text{d'où } Y_1 = (\lambda - 8,4.10^3) M_3 \quad Y_2 = \frac{K_2}{M_2} \frac{(\lambda - 3,7.10^5)}{(\lambda - 3,83.10^5)(\lambda - 4,85.10^3)}$$

La droite Y_1 a une pente très forte et coupe l'axe des y très bas . Son intersection avec la courbe Y_2 se produit donc très près des asymptotes .

On a en effet $\frac{K_2}{c} = 2,13.10^5 \text{ dynes/cm}$ alors que pour $\lambda = 0$, $Y_1 = 2,7.10^7 \text{ dynes/cm}$

On peut faire une vérification rapide .

Pour la première fréquence , prenons $\lambda = 4,75.10^3$.

Après division par M_3 de Y_1 et Y_2 , on a :

$$Y_1 = -3,65 \cdot 10^3$$

$$Y_2 = (1,72 \cdot 10^5) \frac{(-3,65 \cdot 10^5)}{(-3,78 \cdot 10^5)(-0,1 \cdot 10^3)}$$

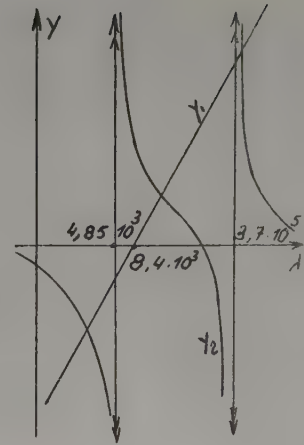
$$Y_2 = -1,65 \cdot 10^3 \quad \text{donc } Y_1 < Y_2$$

De même : pour $\lambda = 8,5 \cdot 10^3$

$$Y_1 = 0,1 \cdot 10^3 \quad Y_2 = 4,6 \cdot 10^1 : Y_2 < Y_1$$

pour $\lambda = 3,9 \cdot 10^5$

$$Y_1 = 3,8 \cdot 10^5 \quad Y_2 = 0,35 : Y_2 \ll Y_1$$



Dans tous les cas, la variation est inférieure au 1/50 de la valeur. Expérimentalement, on a trouvé une variation inférieure au 1/100 sur la période entre l'état libre et l'état bloqué pour la table.

÷
÷ ÷
÷

Chapitre IV

APPAREIL EXPERIMENTAL

(fig. 13)

IV,1 Montage mécanique - Schéma 1 -

La vérification expérimentale a été faite pour des arbres d'acier de 7mm de diamètre et 470mm de long environ et pour des rotors en aluminium ou en acier en forme de disques, cylindres ou plaques de poids moyen 280 g. La fréquence de flexion la plus basse était, par conséquent, voisine pour tous de 7Hz5, la seconde atteignait 100 Hz pour le cylindre et 70 Hz pour la plaque.

Les arbres, placés verticalement, étaient encastrés dans un manchon ajusté au centre d'un rotor de 25 kg et 400 mm de diamètre et parfaitement centré 1,5/100 de mm d'excentrement maximum. Ce volant d'inertie était entraîné par l'intermédiaire d'un accouplement élastique par un moteur de 1/3 CV jusqu'à une vitesse de 7000tr/min, vitesse variable par un alternostat.

Le volant d'inertie était monté sur une table vibrante constituée de 4 lames parallèles verticales fixées à un lourd bâti et supportant un cadre dans lequel étaient fixées les plaques contenant les paliers à roulement du volant.

La première fréquence propre de la table était de l'ordre de 12 Hz5, la seconde de 50 Hz. Un excitateur permettait de faire vibrer la table avec une amplitude donnée, soit donc de donner à l'extrémité de l'arbre en rotation un mouvement sinusoïdal perpendiculaire à l'axe.

IV, 2 Technique et précision des mesures -

IV,2,1 Vitesse de rotation - Schéma 2

Sur le volant est collée une petite pastille d'acier au silicium qui passe lors de la rotation devant un capteur magnétique fixé sur la table. Le top électrique est utilisé pour déclencher le balayage d'un oscillo bi-courbe. Sur la seconde voie, est envoyée une tension sinusoïdale provenant d'un générateur de fréquence TBF. La vitesse de balayage est réglée de telle façon qu'une seule sinusoïde se stabilise sur l'écran lorsque la fréquence est égale au nombre de tours/seconde du volant. Une augmentation ou diminution de la vitesse se traduit par un glissement de la sinusoïde dans un sens ou dans l'autre (identique au phénomène stroboscopique). On apprécie ainsi facilement et on corrige une variation de vitesse de 1/50 de tours, même aux vitesses faibles. Un fréquencemètre - périodemètre donne la durée d'un cycle avec une précision supérieure au 1/1000.

IV,2,2 Mouvement de l'arbre - Schéma 3

Deux capteurs de déplacement sont placés perpendiculairement à l'axe de l'arbre et à $\pi/2$ l'un de l'autre. La tension est récupérée à la sortie des ponts d'alimentation et envoyée sur 2 millivoltmètres. D'autre part, les 2 signaux déphasés de $\pi/2$ dans l'espace sont envoyés en balayage horizontal et vertical sur un oscillo. On visualise ainsi directement le mouvement de l'arbre. En utilisant un oscillo bicourbe, on peut avoir un ordre de grandeur par la position relative des 2 sinusoides, du déphasage et vérifier le sens de rotation du centre de l'arbre : direct ou rétrograde par rapport au sens de rotation de l'arbre lui-même. L'amplitude du mouvement du centre du rotor est limitée lui-même par un anneau de garde de 20mm de diamètre. La lecture de la tension délivrée par les capteurs lorsque l'arbre atteint l'anneau, permet un étalonnage direct et une vérification des constantes des appareils de mesures, de lecture et amplificateur, notamment de la chaîne amplis-enregistreurs, qui, à partir des 2 capteurs, donne un enregistrement graphique du mouvement de l'arbre sur deux voies parallèles.

IV,2,3 Mouvement de la table - support - Schéma 4

L'excitation de l'arbre se faisait par l'intermédiaire de la table à laquelle était imposé un mouvement de translation sinusoïdale dans le sens de la plus faible raideur, par l'intermédiaire d'un excitateur alimenté par un amplificateur de puissance avec ampèremètre, incorporé, pour le contrôle de l'énergie fournie à la table. La fréquence ou la période du signal du générateur T.B.F. de commande était mesurée à l'aide d'un fréquencemètre-périodmètre. La réponse de la table était contrôlée par un capteur de vitesse dont la tension était envoyée directement sur un millivoltmètre.

÷
÷ ÷
÷

Conclusion

L'étude analytique effectuée a permis de préciser quelques points et de chiffrer certains phénomènes prévus ou signalés par différents auteurs et l'expérience a donné des résultats concordants.

La solution des équations dans les axes fixes nous a donné le mouvement du centre de gravité dans les différents cas d'excitation. Le sens de rotation de précession prévue par DEN HARTOG est vérifié et se produit dans un mouvement elliptique dans le cas de l'excitation par déplacement de la table, du fait de la présence d'un terme en $Y_1 \cos \omega t$ et $1/2 \sin \omega t$ dans la réponse; et ceci a été vérifié pour les 4 racines correspondant à différentes vitesses de rotation, le phénomène étant évidemment plus caractéristique pour les fréquences de résonance.

De plus, la présence d'un terme dû à l'excentrement du centre de gravité donne lieu à un mouvement supplémentaire superposé sur le précédent. En effet, si on considère le centre de gravité à une distance e de l'axe de rotation, que l'on peut situer sur l'axe x_1 , lié au rotor, puisque l'arbre est de section circulaire, le passage dans les axes fixes, en multipliant la matrice F_m par S^{-1} donne une expression de la forme :

$$\phi_m = \begin{vmatrix} m R^2 e \cos Rt \\ m R^2 e \sin Rt \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

d'où les valeurs : (cf II,3,3)

$$\alpha = \frac{b m R^2 e (Y_2 - Y_1) \sin Rt}{Y_2^2 - Y_1^2}$$

$$\beta = \frac{b m R^2 (Y_2 - Y_1) \cos Rt}{Y_2^2 - Y_1^2}$$

et les valeurs de x et y correspondantes :

$$x = \frac{m R^2 e \cos Rt}{a - m \omega^2} + \frac{b^2 m R^2 e \cos Rt}{(a - m \omega^2)(Y_2 + Y_1)}$$

$$y = \frac{m R^2 e \sin Rt}{a - m \omega^2} + \frac{b^2 m R^2 e \sin Rt}{(a - m \omega^2)(Y_2 + Y_1)}$$

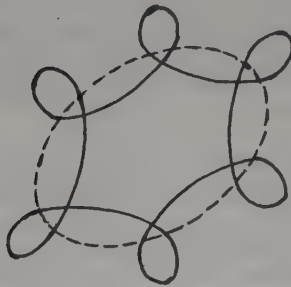
La solution générale, en appliquant le théorème de superposition, est donc de la forme : (cf II,3,5)

$$x = \left(\eta + \frac{\gamma}{Y_2 + Y_1} \right) \cos Rt + \left(\gamma \frac{\delta Y_1}{Y_2^2 - Y_1^2} \right) \cos \omega t$$

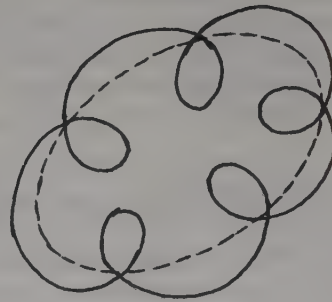
$$y = \left(\eta - \frac{v}{Y_2 + Y_1} \right) \sin Rt + \left(\frac{\delta Y_1}{Y_2^2 - Y_1^2} \right) \sin \omega t$$

avec R grand par rapport à ω et η et v petits devant δ , pour les cas expérimentaux.

Le mouvement est donc la superposition d'un mouvement de rotation « propre » et de la réponse à l'excitation. Dans le cas où R et ω sont de même sens on a une courbe du genre hypocycloïde, dans le sens contraire épicycloïde.



ω et R sens contraire



ω et R même sens

Le phénomène a été observé parfaitement à l'oscillographe pour les 2 fréquences correspondant aux 2 résonances de grandes périodes et, pour la 3^{ème}, venant du 2^{ème} mode de vibration. De plus le nombre de rotations propres effectuées par l'arbre au cours d'un cycle en ω est évidemment plus ou moins important suivant le signe relatif de R et ω . En effet, si en première approximation, on considère les 2 mouvements comme circulaires, en régime établi, on a $\rho^2 = x^2 + y^2 = a + b \cos(\omega + R)t$, soit une fréquence de variation pour $\rho = \frac{\omega + R}{2\pi}$. Par conséquent, pour une excitation donnée, non seulement, la forme de la courbe mais le nombre de boucles observées permet de préciser si l'on est en présence d'une résonance en ω^+ ou ω^- connaissant la vitesse de rotation et la période d'excitation. Un enregistrement graphique a été effectué qui permet de s'en rendre compte et de mesurer les périodes correspondant aux différents mouvements.

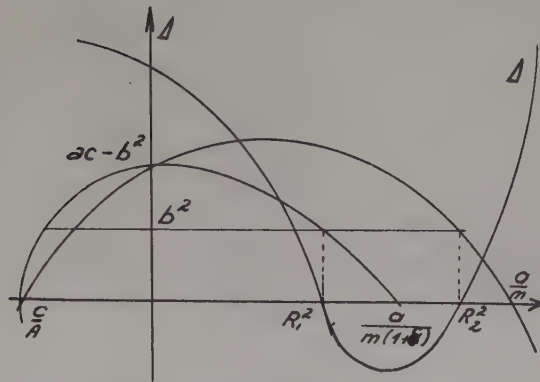
Pour une période de rotation propre $T_1 = 14.250$ et une excitation de période $T_2 = 85.990$ on a un enregistrement sur lequel on retrouve nettement le mouvement de rotation propre superposé sur le mouvement de rotation propre. On a sensiblement $T_2 = 6 T_1$. Or, sur une sinusoïde, on trouve 5 traces correspondant à la rotation propre. Le mouvement est donc en ωt . La légère différence entre T_2 et $6 T_1$ entraîne un mouvement de rotation de la « boucle » sur l'ellipse, avec une période :

$$T = \frac{T_1 6 T_2}{T_2 - 6 T_1}$$

Soit T de l'ordre de 14 secondes, l'enregistrement nous donne sensiblement 10 s. Le 2^{ème} enregistrement pour la même vitesse de rotation, mais pour une période de l'excitation $T_2 = 111.735$ est évidemment plus saccadé (mouvement en épicycloïde). Cette fois, au cours d'un cycle, on rencontre 9 oscillations correspondant à la rotation propre alors que $T_2 \neq 8 T_1$. On a de plus un glissement des boucles de période théorique 6 s, mesurée 5 s.

L'étude de l'instabilité dans les axes mobiles conduit à la condition $\Delta_1 > 0$ (cf II, 4). Δ est un carré parfait dans le cas de symétrie considéré. Même si l'on a un léger excentrement $e + \varepsilon$ du centre de gravité, on obtient seulement une zone d'instabilité voisine de la fréquence propre la plus basse :

$$\Delta = \{ [a - m R^2 (1 + \varepsilon)] (c + A R^2) - b^2 \} \{ (a - m R^2) (\bar{c} + A R^2) - b^2 \}$$



négatif entre R_1 et R_2 voisin de $\frac{a}{m}$, la plage d'instabilité étant légèrement plus large expérimentalement.

Si on applique le critère de Routh à l'équation générale avec $\lambda = J \omega$, on a :

$$[(a + m \lambda^2)(c + A \lambda^2) - b^2]^2 + [CR \lambda (a + \lambda^2 m)]^2 = 0$$

Equation du 8ème degré en λ , dont tous les termes sont pairs et tous positifs en λ .

Le Tableau de Routh a ses colonnes des coefficients impairs nuls. Il y a toujours stabilité.

Si on considère un amortissement par frottement dans l'air pour les mouvements en α et β , il s'introduit des termes en $\mu \alpha'$ et $\mu \beta'$ et pas de termes de couplage, si μ est le coefficient

a_1	a_0	0	0	
a_3	a_2	a_1	a_0	
a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
		a_4		

d'amortissement, soit :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a - m \omega^2 & 0 & 0 & -b \\ 0 & a - m \omega^2 & b & 0 \\ 0 & b & c - A \omega^2 - J \mu \omega & JCR \omega \\ -b & 0 & JCR \omega & c - A \omega^2 - J \mu \omega \end{vmatrix}$$

$$\Delta = [(a - m \omega^2)(c - A \omega^2) - b^2]^2 - [CR \omega (a - m \omega^2)]^2 + [J \mu \omega (a - m \omega^2)]^2 - J \mu \omega (a - m \omega^2) [(a - m \omega^2)(c - A \omega^2) - b^2]$$

$$\Delta = Y_1^2 - [C^2 R^2 \omega^2 + \mu^2 \omega^2] (a - m \omega^2)^2 - J \mu \omega (a - m \omega^2) Y_1$$

$$\Delta = Y_1^2 - Y_2^2 - Y_4$$

Les 2 premiers termes n'ont que des puissances paires en ω . Les racines correspondant à ces 2 termes sont celles de $Y_1^2 - Y_2^2$ qui ont été légèrement éloignées par l'amortissement. Le système est plus

Le rotor est un disque avec jante de 160mm de diamètre d'un poids de 950g. Il est monté serré sur l'arbre à 360mm d'un palier. Lors de l'étude expérimentale du fouettement, il a été observé que le phénomène débutait avant que la vitesse de rotation atteigne le double de la fréquence propre « statique » de l'arbre, et ceci, en vitesse croissante ou décroissante. Nous avons cherché à voir quelle était l'influence de l'effet gyroscopique sur ce déplacement, cette trainée en fréquence.

Si u et v désignent les distances aux appuis, du disque sur l'arbre, la résistance des matériaux nous donne pour la matrice K^{-1} des coefficients d'influence :

$$K^{-1} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{u^2 v^2}{3EI}, \quad \beta = \frac{uv(u^2 - v^2)}{3I^2 EI}$$

$$\gamma = \frac{u^3 + v^3}{3I^2 EI}$$

Avec $u = 0,4 \text{ l}$ $v = 0,6 \text{ l}$ nous avons :

$$K^{-1} = 10^{-2} \begin{vmatrix} \frac{1,92 \text{ l}^3}{EI} & \frac{-1,6 \text{ l}^2}{EI} \\ \frac{-1,6 \text{ l}^2}{EI} & \frac{9,33 \text{ l}}{EI} \end{vmatrix}$$

d'où la matrice des raideurs :

$$K = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad a = \frac{60,8EI}{\text{l}^3} \quad b = \frac{10,4 EI}{\text{l}^2} \quad c = \frac{12,5 EI}{\text{l}}$$

Les fréquences propres des 2 modes varient évidemment avec la nature et le serrage des paliers. Pour des paliers lisses, de longueur 10mm, nous avons obtenu des périodes propres $T_1 = 51.000 \mu\text{s}$ et $T_2 = 8.420 \mu\text{s}$, valeurs que nous utiliserons pour déterminer la masse équivalente et les variations des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation (cf Chap.III 2,1)

A partir de l'équation $(a - m\omega^2)(c - A\omega^2) - b^2 = 0$, nous avons, en posant :

$$A = \alpha m \text{ l}^2 \quad v = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{et} \quad R = \frac{(1+v)^2}{v}$$

$$\alpha^2 + \alpha \left[\frac{2c}{A \text{ l}^2} - \frac{R(ac - b^2)}{\text{l}^2 a^2} \right] + \frac{c^2}{\text{l}^4 a^2} = 0$$

Soit avec les valeurs précédentes pour T_1 et T_2 et $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}^2$

$$\alpha^2 - 6,44 \alpha - 0,423 = 0 \quad \text{d'où} \quad \alpha = 0,014$$

On a d'après l'équation (2) chap. III,2,1

$$m^2 = \frac{T_1^2 T_2^2 (ac - b^2)}{\alpha(4\pi^2) l^2} \quad \text{on en déduit } m = 1260 \text{ g.}$$

On peut alors calculer les pentes des tangentes aux courbes $N = f(n)$; N = fréquences propres , n = vitesse de rotation , au voisinage de $n = 0$.

En utilisant la formule III ,1,2 B

$$\frac{ds_0}{ds} = \pm \frac{2A}{C} \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_3^2 - s_2^2} \quad \text{avec } s_0 = \frac{n}{N} \quad s = \frac{\omega}{\omega_1}$$

$$s_1 = \frac{\omega_1}{\omega_1} = 1 \quad s_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$s_3^2 = \frac{a}{m \omega_1^2} \quad \omega_1 \text{ et } \omega_2 \text{ pulsations propres;}$$

$$\text{ou } \frac{dN}{dn}_{n=0} = \frac{1}{2\alpha} : \frac{1}{2} (\varphi)^2 \frac{\frac{a}{4\pi^2 m l^3} \cdot T_1^2 - 1}{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} \quad \text{pour } N = N_1$$

On trouve :

$$\frac{dN}{dn}_{n=0} = \pm 4.10^{-3}$$

pour les pentes des tangentes au voisinage de la fréquence propre la plus basse .

La fréquence propre statique étant de 19,6 Hz, on trouverait donc, lorsque le disque tourne au voisinage du double de sa vitesse critique, 2 fréquences distantes de $\frac{4}{10}$ Hz environ.

Expérimentalement on observe le début du fouettement environ 2,5 Hz avant qu'on atteigne le double de la vitesse critique et il se prolonge au delà jusqu'à 3 Hz, donc une gamme de vitesses beaucoup plus large . Mais on a observé également 2 régimes de tournoiement assez différents dans cette zone d'instabilité, la 2^{ème} correspondant à une déformation plus importante de l'arbre, comme dans le cas des disques en bout d'arbre . Enfin, différentes zones d'instabilité conduisant à des mouvements d'amplitudes plus faibles ont été observées pour des vitesses voisines des multiples entiers de la vitesse critique .

÷
÷ ÷
÷

Chapitre I

**CALCULS NUMERIQUES - CALCULS d'ERREURS
POUR L'ETUDE DU COUPLAGE FLEXION - TORSION**

I,1 - Calcul des masses -

Les cotes, avec leur précision sont données sur la fig. 12

La masse des surcharges	$M_1 = 6\ 000\text{ g}$
masse des lames (f)	$M_2 = 1\ 450\text{ g}$
masse de la lame (l)	$M_3 = 1\ 940\text{ g}$
masse de la lame (g)	$M_4 = 440\text{ g}$

Précision -

Les surcharges pèsent 3 kg à 10 g. près

$$\Delta M_1 < 10\text{ g}$$

$$\frac{\Delta M_2}{M_2} = \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{7,8} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{30} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{155} < \frac{3}{100} \quad \Delta M_2 < 40,8\text{ g}$$

$$\frac{\Delta M_3}{M_3} = \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{7,8} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{7,8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{76} + \frac{2}{420} < \frac{4}{152} \quad \Delta M_3 < 51\text{ g}$$

$$\frac{\Delta M_4}{M_4} = \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{7,8} + \frac{1}{94} + \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{76} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{7,8} < \frac{1}{30} \quad \Delta M_4 < 14,2\text{ g}$$

$$\Delta M_{\text{total}} < 130\text{ g}$$

On a donc une erreur absolue de 130g pour une masse totale de 9k.8, soit une erreur sur la masse inférieure à 2/100.

Mais dans la valeur de la masse équivalente de la lame, on peut faire intervenir tout ou partie de la longueur de la lame comprise entre les barresupports. Comme elle intervient pour le 1/4 de sa valeur, l'erreur absolue est donc :

$$440 - \frac{440}{4} = 330\text{ g}$$

soit une erreur absolue inférieure à $130 + 330 = 460\text{ g}$.

La masse équivalente vaut donc :

$$1450 + \frac{1940}{4} + \frac{440}{4} + 6000 = 8,04\text{ kg} \quad \text{avec une précision supérieure à}$$

soit $M = 8,04 \pm 0,46\text{ kg}$

6/100

1,2 Calcul des Inerties

Soit I_1 l'inertie de l'une des masses :

$$I_1 = I_{\Delta} + M_1 L^2$$

avec $I_{\Delta} = \frac{M_1}{12} (a^2 + b^2)$ $I_{\Delta} = 3,12 \cdot 10^4 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$

Précision :

$$\frac{\Delta(I_{\Delta})}{I_{\Delta}} = \frac{\Delta M_1}{M_1} + \frac{\Delta(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = \frac{\Delta M_1}{M_1} + \frac{2a \Delta a + 2b \Delta b}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{\Delta(I_{\Delta})}{I_{\Delta}} = \frac{1}{300} + \frac{2 \cdot \frac{2}{10} 50 + 2 \cdot \frac{2}{10} 100}{50^2 + 100^2} < \frac{1}{100}$$

soit $\Delta(I_{\Delta}) = 3,12 \cdot 10^2 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$

L'erreur sur I_1 est maximum, lorsque L , variable, est minimum. On prend $L = 34 \text{ mm}$ connue au $1/2 \text{ mm}$ près, d'où :

$$M_1 L^2 = 3,46 \cdot 10^4 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

Précision :

$$\frac{\Delta(M_1 L^2)}{M_1 L^2} = \frac{1}{300} + \frac{2,05}{34} < \frac{3,34}{100}$$

Soit $\Delta(M_1 L^2) = 11,5 \cdot 10^2 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$

D'où une erreur absolue sur I_1 : $\Delta(I_1) = 14,6 \cdot 10^2 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$

Soit I_2 l'inertie des lames supports

$$I_2 = \frac{4M_2 f^2}{12} + \frac{M_2 g^2}{4} \quad I_2 = 1,44 \cdot 10^5 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

Précision :

$$\frac{\Delta(I_2)}{I_2} = \frac{\Delta M_2}{M_2} + \frac{\frac{2}{3} f \Delta f + \frac{1}{2} g \Delta g}{\frac{1}{3} f^2 + \frac{1}{4} g^2} = \frac{3}{100} + \frac{\frac{2}{3} 155 + \frac{94}{2}}{\frac{155^2}{3} + \frac{94^2}{4}} < \frac{4,5}{100}$$

D'où l'erreur absolue sur I_2 : $\Delta I_2 = 6,5 \cdot 10^3 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$

Soit I_3 l'inertie de la partie de la lame jusqu'à l'axe Δ' supposé axe de rotation

$$I_3 = \frac{M_3' l_3^2}{105} \quad \text{avec} \quad M_3' = M_3 + \frac{M_4}{2} = 2,160 \text{ g.}$$

$$l_3' = l + \frac{g}{2} = 467,5 \text{ mm}$$

$$I_3 = 4,54 \cdot 10^4 \text{ g. cm}^2$$

Précision

$$\Delta(M_3') = \Delta M_3 + \frac{\Delta M_4}{2} = 51 + 7,1 = 58,1 \text{ g.}$$

$$\Delta(l_3') = \Delta l + \frac{\Delta g}{2} = 2 + 1 = 3 \text{ mm}$$

d'où
$$\frac{\Delta(I_3)}{I_3} = \frac{58,1}{2160} + 2 \cdot \frac{3}{467,5} < \frac{4,1}{100}$$

D'où l'erreur absolue sur I_3
$$\Delta(I_3) = 1,8 \cdot 10^3 \text{ g. cm}^2$$

Soit I_4 l'inertie de la partie extrême de la lame

$$I_4 = \frac{1}{3} \frac{M_4}{2} \cdot \frac{g^2}{4} \quad I_4 = 1,610^3 \text{ g. cm}^2$$

Précision

$$\frac{\Delta(I_4)}{I_4} = \frac{1}{30} + \frac{2}{94} < \frac{1}{15}$$

D'où l'erreur absolue sur I_4
$$\Delta(I_4) = 1,07 \cdot 10^2$$

L'inertie totale I est égale à la somme des inerties

$$I = 3,22 \cdot 10^5 \text{ g. cm}^2$$

et l'erreur absolue
$$\Delta I = [14,6 \times 2 + 65 + 18 + 1,07] \cdot 10^2 = 103,2 \cdot 10^2 \text{ g. cm}^2$$

d'où l'erreur relative maximum sur l'inertie dans les hypothèses considérées :

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{3,18}{100}$$

$$I = 3,22 \cdot 10^5 \pm 0,1 \text{ g. cm}^2$$

1,3 Calcul des coefficients de la matrice des raideurs

On prend un module d'Young $E = 20 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}^2$ à 500 kg/mm^2 près.

Inertie de la section en flexion :

$$I = \frac{h i^3}{12} \quad I = 3,04 \cdot 10^9 \text{ cm}^4$$

$$\frac{\Delta(I)}{I} = \frac{1}{76} \cdot \frac{1}{50} + 3 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{7,8} < \frac{1}{38}$$

Calcul de a b c

$$a = \frac{12EI}{l^3} \quad a = 7,06 \cdot 10^7 \text{ dynes/cm}$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{500}{20000} + \frac{1}{38} + 3 \cdot \frac{5}{467,5} \quad \frac{\Delta a}{a} < \frac{1}{10}$$

$$b = \frac{6EI}{l^2} \quad b = 1,65 \cdot 10^9 \text{ dynes}$$

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{1}{40} + \frac{1}{38} + 2 \cdot \frac{5}{467,5} \quad \frac{\Delta b}{b} < \frac{8}{100}$$

$$c = \frac{4EI}{l} \quad c = 5,14 \cdot 10^{10} \text{ dynes.cm}$$

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{1}{40} + \frac{1}{38} + \frac{5}{467,5} \quad \frac{\Delta c}{c} < \frac{5,2}{100}$$

1,4 Calcul de la précision des valeurs des fréquences N_1 et N_2

Elles sont données par l'équation :

$$2\lambda = \frac{c}{l} + \frac{a}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{l} - \frac{a}{M}\right)^2 + \frac{4b^2}{Ml}}$$

Dans le cas où $L = 34\text{mm}$ on a :

$$\frac{c}{l} = 15,910^4 \text{ s}^{-2}$$

$$\frac{a}{M} = 8,44 \cdot 10^3 \text{ s}^{-2}$$

$$\frac{4b^2}{Ml} = 4,02 \cdot 10^9 \text{ s}^{-2}$$

on a :

$$\frac{\Delta \left(\frac{c}{l} \right)}{\frac{c}{l}} = \frac{5,2}{100} + \frac{3,2}{100} = \frac{8,4}{100}$$

$$\Delta \left(\frac{c}{l} \right) = 13,3 \cdot 10^3 \text{ s}^{-2}$$

$$\frac{\Delta \left(\frac{a}{M} \right)}{\frac{a}{M}} = \frac{1}{10} + \frac{6}{100} = \frac{16}{100}$$

$$\Delta \left(\frac{a}{M} \right) = 13,5 \cdot 10^2 \text{ s}^{-2}$$

$$\frac{\Delta \left(\frac{4b^2}{Ml} \right)}{\frac{4b^2}{Ml}} = 2 \cdot \frac{8}{100} + \frac{6}{100} + \frac{3,2}{100} = \frac{25,2}{100}$$

$$\Delta \left(\frac{4b^2}{Ml} \right) = 10,1 \cdot 10^8 \text{ s}^{-4}$$

Posons $2\lambda = x+y \pm \sqrt{(x-y)^2 + z}$

on a $2\Delta\lambda = \Delta x + \Delta y \pm \Delta U$

avec $U = \sqrt{(x-y)^2 + z} = \sqrt{\alpha}$

$$\Delta U = \frac{1}{2} \frac{\Delta \alpha}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\Delta \alpha = 2\Delta[(x-y)](x-y) + \Delta z$$

$$= 2(\Delta x - \Delta y)(x-y) + \Delta z$$

Finalement :

$$2\Delta\lambda = \Delta x + \Delta y \pm \frac{1}{2} \frac{2(\Delta x - \Delta y)(x-y) + \Delta z}{\sqrt{(x-y)^2 + z}}$$

Soit $\lambda_1 = \lambda^{(-)} \quad 2\Delta\lambda_1 = \Delta x \left[1 - \frac{x-y}{\sqrt{(x-y)^2 + z}} \right] + \Delta y \left[1 + \frac{x-y}{\sqrt{(x-y)^2 + z}} \right] + \frac{1}{2} \frac{\Delta z}{\sqrt{(x-y)^2 + z}}$

$$\lambda_1 = \lambda^{(+)} \quad 2\Delta\lambda_2 = \Delta x \left[1 + \frac{x-y}{\sqrt{(x-y)^2 + z}} \right] + \Delta y \left[1 - \frac{x-y}{\sqrt{(x-y)^2 + z}} \right] + \frac{1}{2} \frac{\Delta z}{\sqrt{(x-y)^2 + z}}$$

d'où :

$$2\Delta\lambda_1 = 13,3 \left[1 - \frac{15,1 \cdot 10^{-1}}{1,63} \right] 10^3 + 13,15 \left[1 + \frac{15,1 \cdot 10^{-1}}{1,63} \right] 10^2 + \frac{1,01 \cdot 10^9}{2 \cdot 1,63 \cdot 10^5}$$

$$2\Delta\lambda_1 = 6,03 \cdot 10^3 \quad \lambda_1 = 4\pi^2 N_1^2 \quad \Delta N_1 = \frac{\Delta\lambda_1}{8\pi^2 N_1}$$

$$N_1 = 7,07 \text{ Hz} \quad \text{d'où} \quad \Delta N_1 = 5,35 \text{ Hz}$$

De même : $2\Delta\lambda_2 = 13,3 [1+0,925] 10^3 + 13,5 [1-0,925] 10^2 + 3,1 \cdot 10^9$

$$2\Delta\lambda_2 = 28,7$$

$$N_2 = 64,2 \text{ Hz} \quad \text{d'où} \quad \Delta N_2 = 2,8 \text{ Hz}$$

Chapitre II

CALCULS NUMERIQUES - CALCULS d'ERREURS

POUR L'ETUDE DU ROTOR PARFAIT

II,1 Calcul des fréquences propres des disques

Exemple : Disque 1

$$T_1 = 96 \cdot 500 \text{ } \mu\text{s} \pm 500$$

$$T_2 = 11 \cdot 800 \text{ } \mu\text{s} \pm 50$$

Calcul de α

$$\text{On a l'équation } \alpha^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{R}{12}\right) \alpha + \frac{1}{9} = 0$$

$$\text{dans laquelle : } R = \frac{(1+v)^2}{v} \quad \text{où } v = \frac{T_2}{T_1}$$

En résolvant et en ne conservant que la plus petite des racines, on trouve $\alpha = 0,0213$

$$(v = 0,01494 \quad R = 70,89)$$

Précision

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta T_1}{T_1} + \frac{\Delta T_2}{T_2} = \frac{5}{965} + \frac{5}{1180} < \frac{1}{100}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta v}{v} + \frac{2 \Delta(1+v)}{1+v} = \frac{1}{100} + 2 \cdot \frac{1,49 \cdot 10^{-4}}{1+0,014} \neq \frac{1}{100} \Delta R = 0,7$$

En posant

$$u = \frac{2}{3} - \frac{R}{12}$$

On a :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[-u \pm \sqrt{u^2 - \frac{4}{9}} \right]$$

Ici :

$$\Delta \alpha = \frac{1}{2} \left[\Delta u - \Delta \sqrt{u^2 - \frac{4}{9}} \right]$$

et

$$\Delta \left(\sqrt{u^2 - \frac{4}{9}} \right) = \frac{2u \Delta u}{2 \sqrt{u^2 - \frac{4}{9}}} = \frac{\frac{\Delta R}{12} \left(\frac{2}{3} - \frac{R}{12} \right)}{\sqrt{u^2 - \frac{4}{9}}}$$

d'où :

$$\Delta\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{0,7}{12} - \frac{\frac{0,7}{12} \left[\frac{2}{3} - \frac{7082}{12} \right]}{5,198} \right] = \frac{1}{2} 5,9 \cdot 10^{-2} \left[1 - \frac{5,2408}{5,1982} \right]$$

$$\Delta\alpha = 2,39 \cdot 10^{-4}$$

soit $\alpha = 2,13 \cdot 10^{-2} \pm 0,0239 \cdot 10^{-2}$ et $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = 1,12 \cdot 10^{-2}$

Calcul de m'

On a alors pour valeur de la masse équivalente :

$$m'^2 = \frac{12E^3 l^3}{\alpha \lambda_1 \lambda_2 l^6} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{4\pi}{T^2}$$

$$\text{d'où } m' = \sqrt{\frac{12}{\alpha}} \cdot \frac{T_1 T_2}{4\pi^2} \cdot \frac{E}{l^3} \cdot \frac{\pi D^4}{64} \quad l = \frac{\pi D^4}{64}$$

soit pour le disque 1 $m' = 207 \text{ g.}$

Précision :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m'}{m'} &= \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta T_1}{T_1} + \frac{\Delta T_2}{T_2} + \frac{\Delta E}{E} + \frac{3\Delta l}{l} + \frac{4\Delta D}{D} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1,12}{12} + \frac{5}{965} + \frac{5}{1180} + \frac{5}{200} + \frac{3}{425} + \frac{4 \cdot 5}{100 \cdot 7} \end{aligned}$$

en prenant la longueur de la tige au mm près et le diamètre au 1/20mm

$$\frac{\Delta m'}{m'} < \frac{7,57}{100} \quad \text{soit } m' = 207 \pm 15,7 \text{ g.}$$

Calcul des Inerties

L'inertie équivalente A s'obtient alors par la formule :

$$A = \alpha m' l^2$$

Soit dans le cas considéré : $A = 7960 \text{ g. cm}^2$

Précision :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta A}{A} &= \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta m'}{m'} + \frac{2\Delta l}{l} \\ \frac{\Delta A}{A} &< \frac{1}{10} \quad \text{soit } A = 7960 \pm 796 \text{ g. cm}^2 \end{aligned}$$

L'inertie par rapport à l'axe principal de rotation (axe de la tige) vaut :

$$C = \frac{m R^2}{2} \quad C = 7 \cdot 260 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \quad (\text{inertie de la tige} = 6,2 \text{ g} \cdot \text{cm}^2)$$

Précision :

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta R}{R} = \frac{0,5}{161} + 2 \frac{0,5}{190}$$

car le disque a été usiné avec une précision supérieure au 1/2 mm sur son diamètre et pesé au 1/10 gramme près :

$$\frac{\Delta C}{C} < \frac{1}{100} \quad \text{soit } C = 7 \cdot 260 \pm 75 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

On peut alors résoudre soit graphiquement (cf Annexes chap. III) soit par tâtonnement l'équation $Y_1 = \pm Y_2$

II,2 Calcul des tangentes

On peut calculer la valeur des pentes des tangentes aux courbes $N = f(n)$ aux points $n = 0$, $N = N_1$ et $N = N_2$.

$$\text{On a } \frac{dN}{dn} = \pm \frac{C}{2A} \frac{U T_1^2 - 1}{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} \quad \text{pour } N = N_1$$

$$\text{avec } U = \frac{12EI}{4\pi^2 m' l^3} \quad \text{avec } I = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$\text{soit } U = 4,51 \text{ s}^{-2}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{\Delta u}{U} &= \frac{\Delta E}{E} + \frac{3\Delta I}{I} + 4 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta m'}{m'} \\ &= \frac{5}{200} + \frac{3}{425} + 4 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{7} + \frac{5,56}{100} < \frac{13,57}{100} \end{aligned}$$

$$\text{soit } \Delta u = 0,612$$

On a alors

$$\frac{\Delta U T_1^2}{U T_1^2} = \frac{\Delta u}{u} + 2 \frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{13,57}{100} + \frac{2,5}{965} < \frac{14,6}{100}$$

$$\text{soit } \Delta (U T_1^2) = 0,613$$

d'où

$$z = \frac{dN}{dn} = \frac{7 \cdot 260}{2 \cdot 7 \cdot 960} \left[\frac{4,19 - 1}{65,8} \right] = 2,19 \cdot 10^{-2}$$

avec comme précision :

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta(U T_1^2 - 1)}{U T_1^2 - 1} + \frac{\Delta [1 - (\frac{T_1}{T_2})^2]}{1 - (\frac{T_1}{T_2})^2}$$

$$\text{Or : } \Delta \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 2 \Delta \left(\frac{T_1}{T_2}\right) \cdot \left(\frac{T_1}{T_2}\right) \quad \text{et} \quad \Delta \left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \left(\frac{\Delta T_1}{T_1} + \frac{\Delta T_2}{T_2}\right) \frac{T_1}{T_2}$$

$$\text{d'où : } \frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta U T_1^2}{U T_1^2 - 1} + 2 \frac{\left(\frac{\Delta T_1}{T_1} + \frac{\Delta T_2}{T_2}\right) \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{0,613}{3,19} + 2 \frac{\left(\frac{2}{965} + \frac{1}{1180}\right) 8,77^2}{1 - 8,177}$$

$$\frac{\Delta z}{z} < \frac{32,3}{1000}$$

$$\text{Soit } \frac{dN}{dn} = 2,19 \cdot 10^{-2} \pm 0,71 \cdot 10^{-2}$$

$n=0$
 $N=N_1$

Au point $N = 0$, $N = N_2$ la pente des tangentes est donnée par

$$\frac{dN}{dn} = \pm \frac{C}{2A} \frac{U T_2^2 - 1}{1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2}$$

$$\text{On a } U = 4,51 \text{ s}^{-2}$$

$$\Delta U = 0,612 \text{ s}^{-2}$$

$$U T_2^2 = 6,3 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{\Delta U T_2^2}{U T_2^2} = \frac{13,57}{100} + \frac{2,5}{1180} = \frac{14,5}{100}$$

$$\Delta U T_2^2 = 0,91 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{D'autre part } \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 1,49 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{et } \Delta \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 2 \left(\frac{\Delta T_1}{T_1} + \frac{\Delta T_2}{T_2}\right) \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 2 \left(\frac{5}{965} + \frac{5}{1180}\right) 1,49^2 \cdot 10^{-4} < 4,56 \cdot 10^{-6}$$

On a donc :

$$\frac{dN}{dn} = \pm \frac{7 \cdot 260}{2,7 \cdot 960} \cdot \frac{6,3 \cdot 10^{-4} - 1}{1 - 1,49 \cdot 10^{-2}} \neq 0,456$$

$n=0$
 $N=N_2$

La pente ne dépend sensiblement que du rapport $\frac{C}{A}$ et la précision est celle de ces termes, soit de l'ordre de $\frac{1}{10}$

$$\frac{dN}{dn} = 0,456 \pm 0,045$$

$n=0$
 $N=N_2$

Chapitre III

A-III,1 - Etude des équations III,1,2

$$Y_1 = (s^2 - 1)(s^2 - s_2^2)$$

$$Y_2 = \pm k (s_3^2 - s^2) s \quad \text{pour } R = C^{te}$$

$$Y_3 = \pm (s_3^2 - s^2) s^2 \quad \text{pour } R = \omega$$

$$\text{avec } s = \frac{\omega}{\omega_1} > 0 \quad s_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad s_3 = \frac{12 EI}{m l^3 \omega_1}$$

D'autre part, on a $\mu = \omega^2 \frac{m l^3}{EI}$ dont les variations en fonction de α sont connues

(cf par, III,1,1 et courbe 2)

Etude pour $\alpha = \frac{1}{3}$

$$\text{On a } s_2^2 = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = 14 \quad s_2 = 3,73$$

$$s_3^2 = \frac{12}{\mu_1} = 7,5 \quad s_3 = 2,74$$

En prenant les valeurs positives pour Y_1 et Y_3 on a les résultats suivants qui permettent une construction graphique précise.

s	Y_1	Y_1'	Y_1''	Y_2	Y_2'	Y_2''	Y_3	Y_3'	Y_3''
0	14	0		0	7,5	0	0	0	
0,5							1,812	7	
1	0	-26							
1,12							7,825	14	0
1,58	-17,2	-31,6	0	7,90	0				
1,95							14,6	0	
2	30	-2,8		7	-16,5				
2,5							7,82	-25	
2,74	-42,2	0		0	-15		0	-41,1	
3				-4,5	-19,5		-13,5	-6,3	
3,5	-12,7	66,5		-16,6	-29,25		-58,2	-119	
3,74	0	97,5							
4	30	136		-34	-40,5				

$$\alpha = \frac{1}{10} \quad s_2^2 = 20,5 \quad s_0^2 = 4,96$$

s	Y ₁	Y ₁ '	Y ₁ ''	Y ₀	Y ₀ '	Y ₀ ''	Y ₀	Y ₀ '	Y ₀ ''
0	20,5	0		0	4,96	0	0	0	
0,5	15,18	-21							
0,9							3,46	6	0
1	0	-39		3,96	1,96		3,96	5,92	
1,286				4,26	0				
1,572							6,15	0	
1,9	-43,6	-54,4	0						
2	-49,5	-54		1,92	-7,04		3,84	-12,16	
2,225				0	-9,92				
3	-92	-15		12,12	-22,04		-36,36	-78,2	
3,28	-95	0							
3,5	-97,5								
4	-6,75	+84		44,16	-43,04		-176	-216,2	
4,52	0	+176							
5	+108	285							

$$\alpha = \frac{1}{50} \quad s_2^2 = 72,85 \quad s_0^2 = 4,175$$

s	Y ₁	Y ₁ '	Y ₁ ''	Y ₀	Y ₀ '	Y ₀ ''	Y ₀	Y ₀ '	Y ₀ ''
0	72,85	0		0	4,175		0	0	
0,7	36,81								
0,8	25,98								
0,85							2,45	3,78	0
0,9	13,45	-130					2,72		
1	0	-143,7		3,175	-0,958		3,175	4,35	
1,1	-15,04								
1,44							4,36	0	
2	-206,5	-263,4					0,7	-15,3	
2,042				0	-8,35		0	-19	
3				-14,45	-22,85		-43,4	-83	
3,52	-685	-346	0						
4				-47,9	-43,825		-18,9	-222,5	
5	-1145	-238		-104,1	-70,82				
6							-1145	-815	
6,07	-1288	0		-190	-103				
7	-1445	+388		-314	-142,8		-2245		
8	-557	866							
8,53	0	1220							
9				-690	-236				

Etude pour $\alpha = \frac{1}{30}$

Expérimentalement pour le disque 2 on a $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 45,2$ et $\alpha = 0,035$

On en déduit $\frac{C}{A} = 1,072$

En prenant $\alpha = \frac{1}{30}$ on a $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 46,3$ et $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 3,02$

On cherche alors les racines de $Y_1 = Y_3$ au voisinage de $s = s_1$ correspondant à l'auto excitation.
On assimile les courbes à leur tangente au voisinage de ce point.

On a $Y_1 = (s^2 - 1)(s^2 - s_2^2)$ avec $s_2^2 = 46,3$ $s_3^2 = 4,3$

$Y_3 = \pm \frac{C}{A}(s_3^2 - s^2)s^2$ et $\frac{C}{A} = 1,072$

Pour $s = 1$ $Y_1 = 0$ $Y_1' = 90,6$

$Y_3 = 3,54$ $Y_3' = \pm 4,94$

D'où graphiquement comme racine :

$$s_1' = 0,962$$

$$s_1'' = 1,044$$

Soit en prenant $T_1 = 136 \cdot 300 \mu s$

on a $T_1' = 141 \cdot 800 \mu s$

$T_1'' = 130 \cdot 900 \mu s$

Expérimentalement : $T_1' = 141 \cdot 500$

$T_1'' = 131 \cdot 500$

On cherche par tâtonnement la 3^{ème} racine accessible aux mesures

Pour $s = 4,9$ $Y_1 = -51,3$ soit $T_3' = 27 \cdot 800 \mu s$
 $Y_3 = -50,8$

Expérimentalement on trouve une résonance pour $T_3' = 28 \cdot 500 \mu s$.

Etude pour $\alpha = 8 \cdot 10^{-3}$

Pour le disque 3 on a expérimentalement $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 175$

On trouve $\alpha \neq 8 \cdot 10^{-3}$

et $\mu_1 = 508,29$ $\frac{C}{A} = 5,9 \cdot 10^{-2}$
 $\mu_2 = 3,02$

Le rapport $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 169$ est sensiblement différent $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$; l'erreur est due à la précision des

calculs puisque α , puis μ sont calculés à partir de T_1 et T_2 . Toutefois, cette erreur est inférieure à l'erreur sur les mesures.

On a alors $s_3^2 = 3,02$ et on prend $s_2^2 = 175$. Pour $s = 12,9$ on a $Y_1 \neq Y_3$ soit une valeur de la période de la 3^{ème} résonance égale à $10,650 \mu s$. Expérimentalement on a une résonance pour $T_0 = 11,000 \mu s$. L'écart des fréquences « statiques » et « dynamiques » est très faible.

Valeurs expérimentales : T et $\frac{2\pi}{r}$ en μs , N et n en Hz

$\frac{2\pi}{r}$	50 000	30 000	22 500	14 287	10 000	
n	20	33,3	46	70	100	
T_1	100 400	103 225	105 700	112 160	120 050	Résultats pour le
N_1	9,960	9,688	9,46	8,921	8,33	disque 1 avec
T_1'	93 220	91 100	89 600	86 300	82 710	$T_1 = 96 500$
N_1'	10,728	10,977	11,160	11,587	12,082	$T_2 = 11 800$

$\frac{2\pi}{r}$	67 000	45 000	25 000	18 500		Disque 3 26 000
n	14,9	22,2	40	54		38,5
T_1	148 000	154 300	172 450	189 900		137 650
N_1	6,76	6,49	5,90	5,26	Résultats pour le	7,26
T_1'	127 850	124 000	116 850	112 600	disque 2 avec	136,850
N_1'	7,82	8,06	8,56	7,93	$T_1 = 136 300$	7,31
T_2	26 300	29 500	37 200	43 420	$T_2 = 20 300$	$T_{1st} = 137 250$
N_2	38,0	33,9	26,9	23,05		avec $T_{0st} = 10 388$

Plaque	T_{11}	=	142 500	T_{21}	=	19 876	
	T_{12}	=	140 430	T_{22}	=	12 020	
$\frac{2 \pi}{r}$	333 330	200 000	100 000	70 000	45 000	26 000	20 000
n	3	5	10	14,28	22,22	38,46	50
T_1	140 400	139 600	137 750	136 000	133 100	128 300	125 750
N'	7,12	7,16	7,26	7,35	7,51	7,78	7,95
T_1'	143 000	144 000	146 350	148 475	152 850	164 500	181 000
N_1'	7	6,94	6,82	6,74	6,54	6,07	5,52
T_2			16 840		13 254	10 792	9 845

A-III-2 - Valeurs numériques de la fonction $\mu = f(\alpha)$ (par. III,1,1 - Courbe 2)

α	0	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	2	4	6	∞
$\mu_1^{(-)}$	3	2,87	2,42	2,3	1,9	1,84	1,6	1,29	1,06	0,96	0,8	0,52	0,24	0,167	∞
$\mu_2^{(H)}$	∞	209,13	49,58	41,7	34,1	26,16	22,4	18,71	16,94	16,36	15,2	13,48	12,76	12,50	12
μ_1	∞	72,85	20,5	18,2	17,9	14,2	14	14,5	16	17,05	19	26	53,2	75	∞
μ_2															

Calcul de la tangente pour $\alpha = 0$

$$\mu' = -\frac{2}{\alpha^2} + \frac{\frac{6}{\alpha^2} + \frac{4}{\alpha^3}}{36 + \frac{12}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^2}} = -\frac{2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} [2+3\alpha] \left[1 - \frac{1}{2}(3\alpha+9\alpha^2) + \frac{3}{4} \cdot \frac{(9\alpha^2)}{2} + \varepsilon \right]$$

$$\mu' = -\frac{27}{4}$$

Vérification - En utilisant la formule I_2 et en portant les valeurs de a b c :

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda} = -\frac{\mu_1^2 C^3}{b^2(ac-b^2)} = -\frac{4}{27} \frac{\mu_1^2 I^6}{EI} = \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\lambda EI}{\mu_1 I^2}$$

La concavité est dirigée vers $\mu > 0$ car $b^2 > \frac{ac}{2}$

÷
÷ ÷
÷

Fig. 1

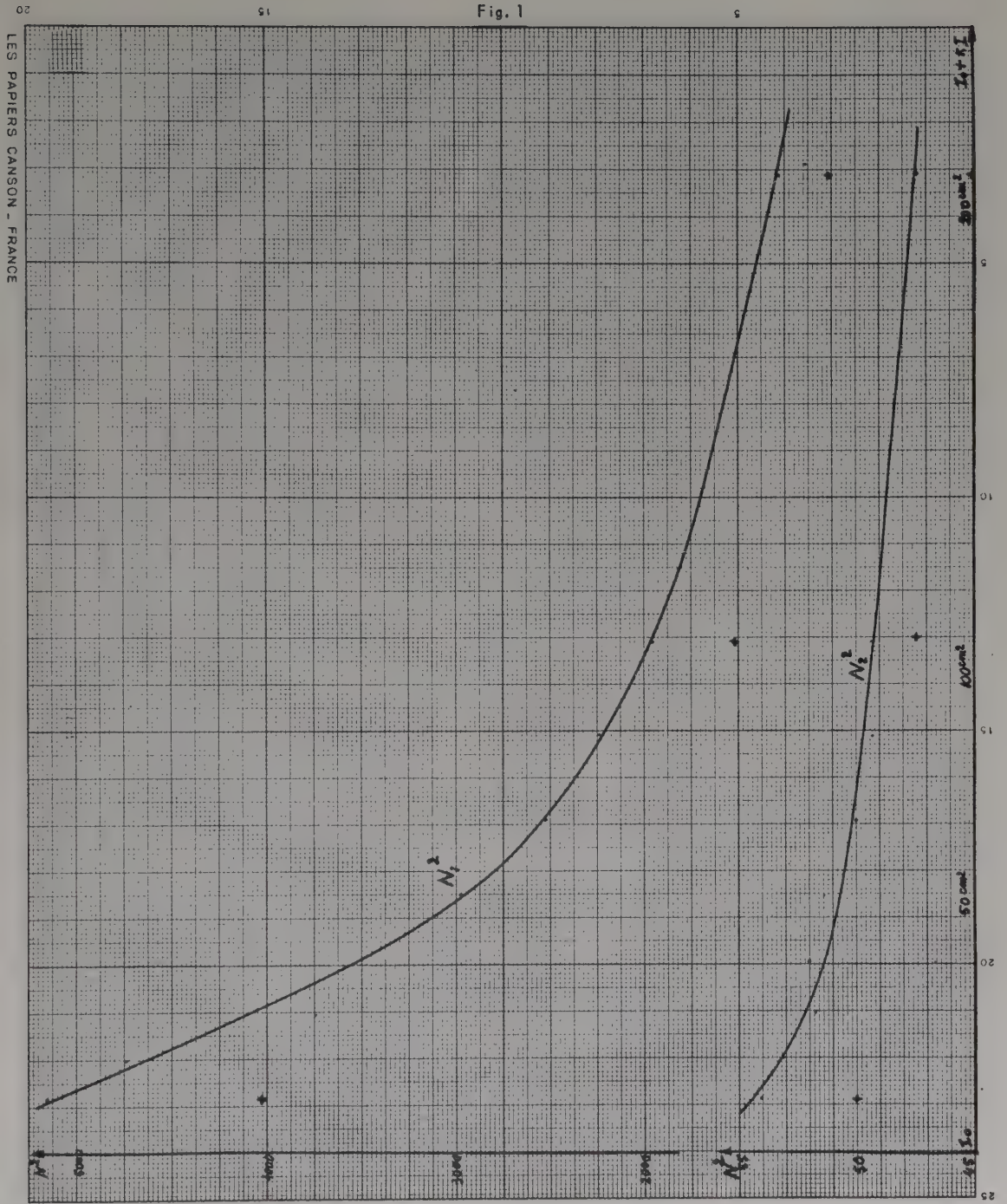


Fig. 2

LES PAPIERS CANSON - FRANCE

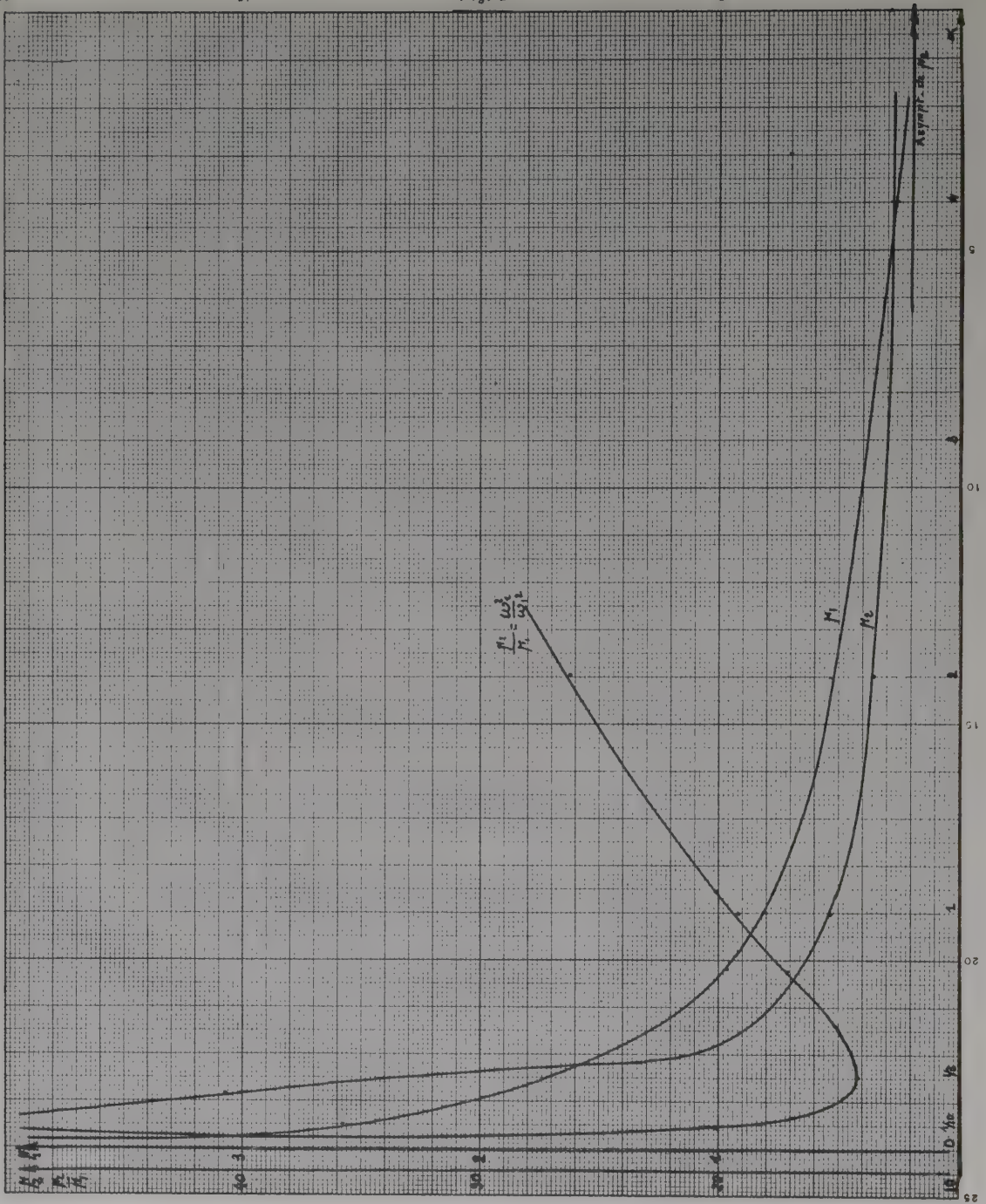


Fig. 3

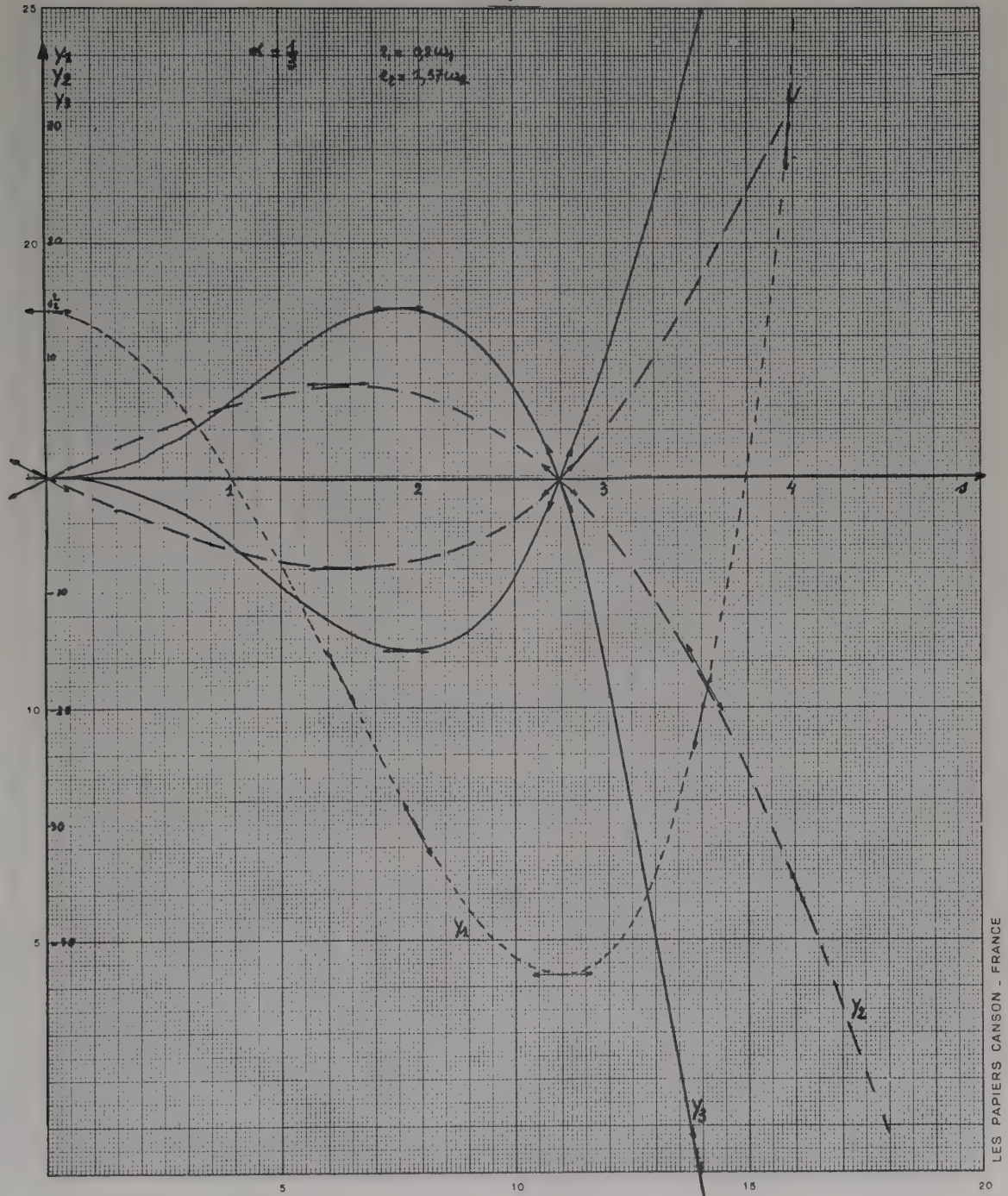


Fig. 4

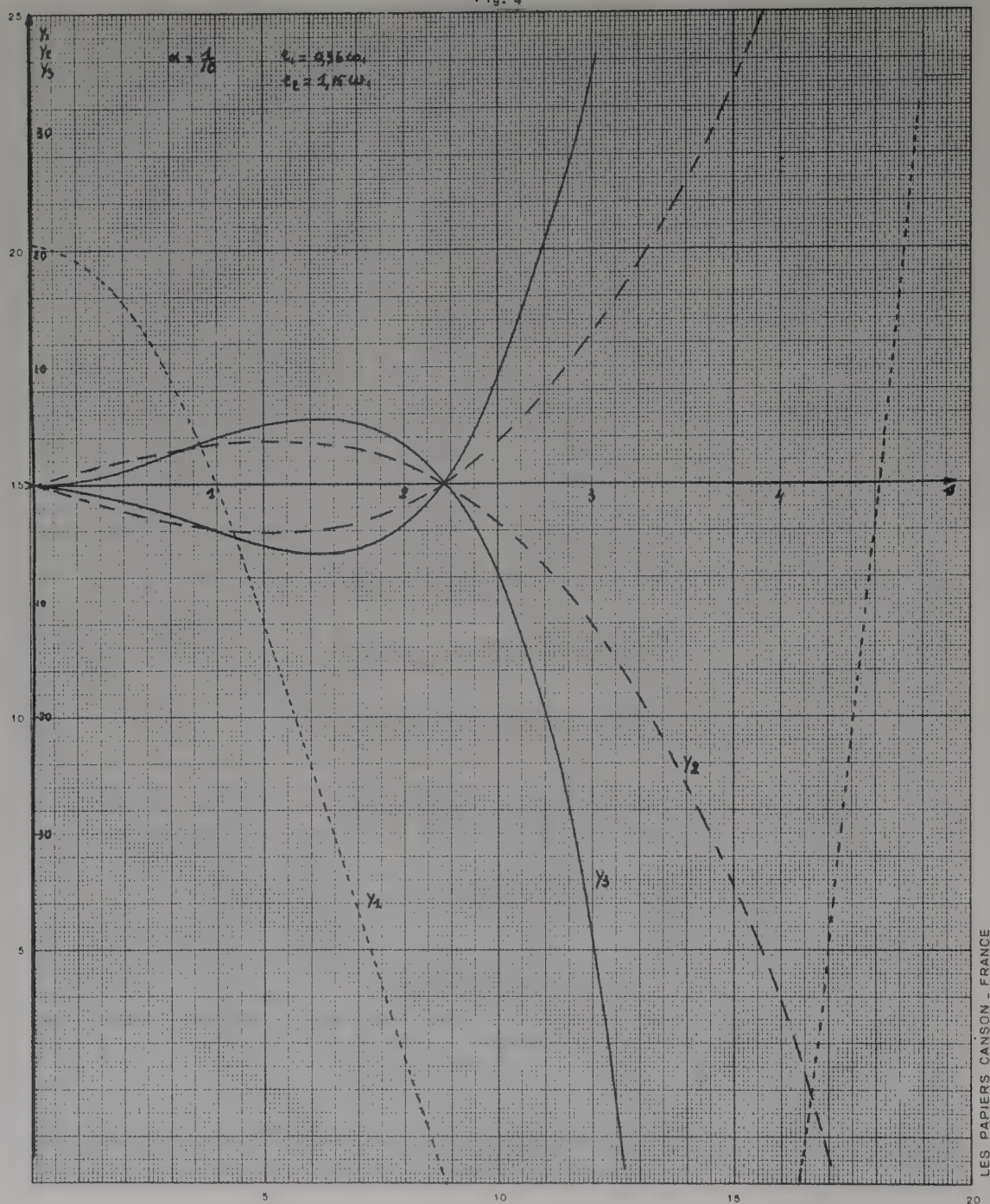


Fig. 5

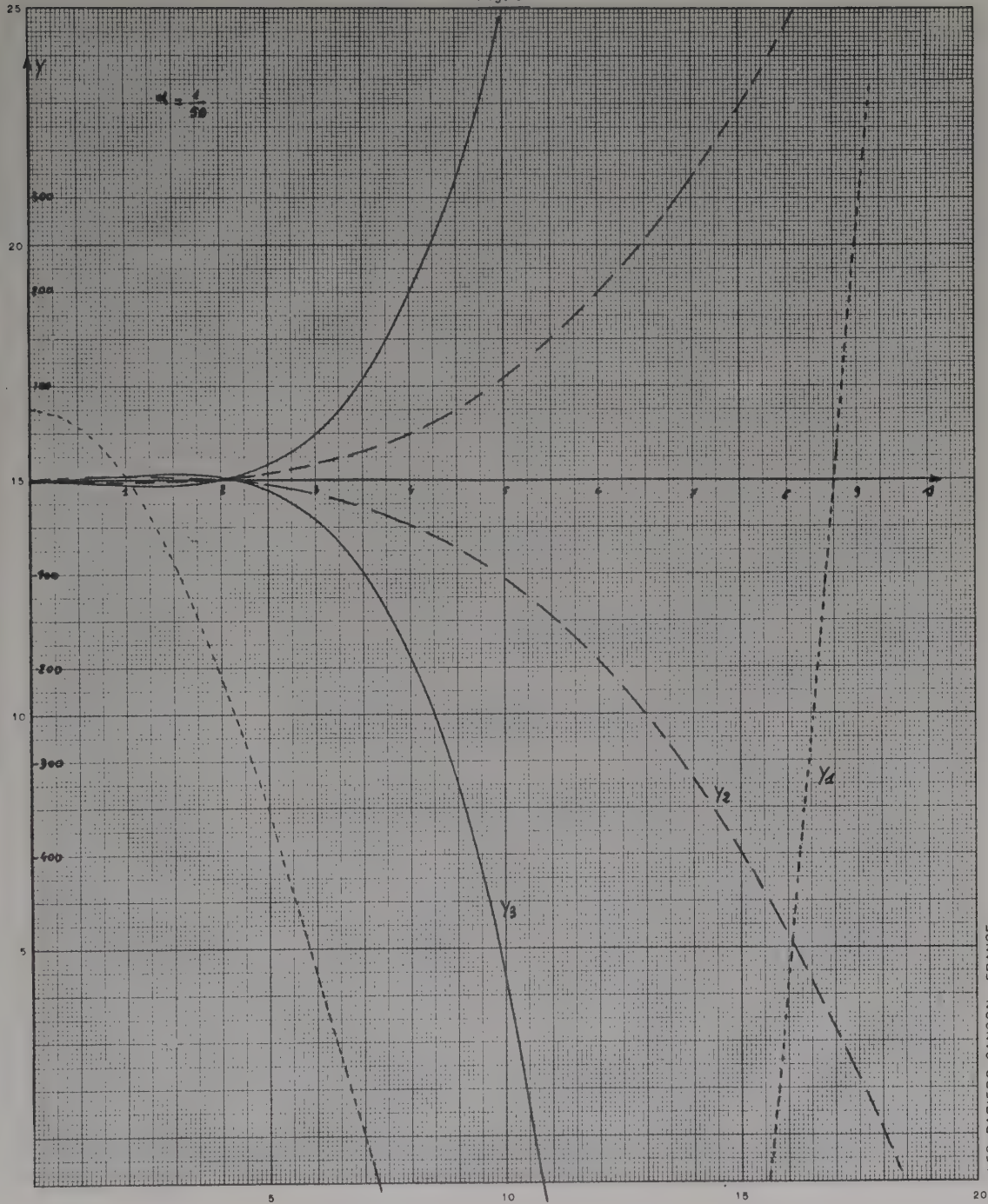


Fig. 6

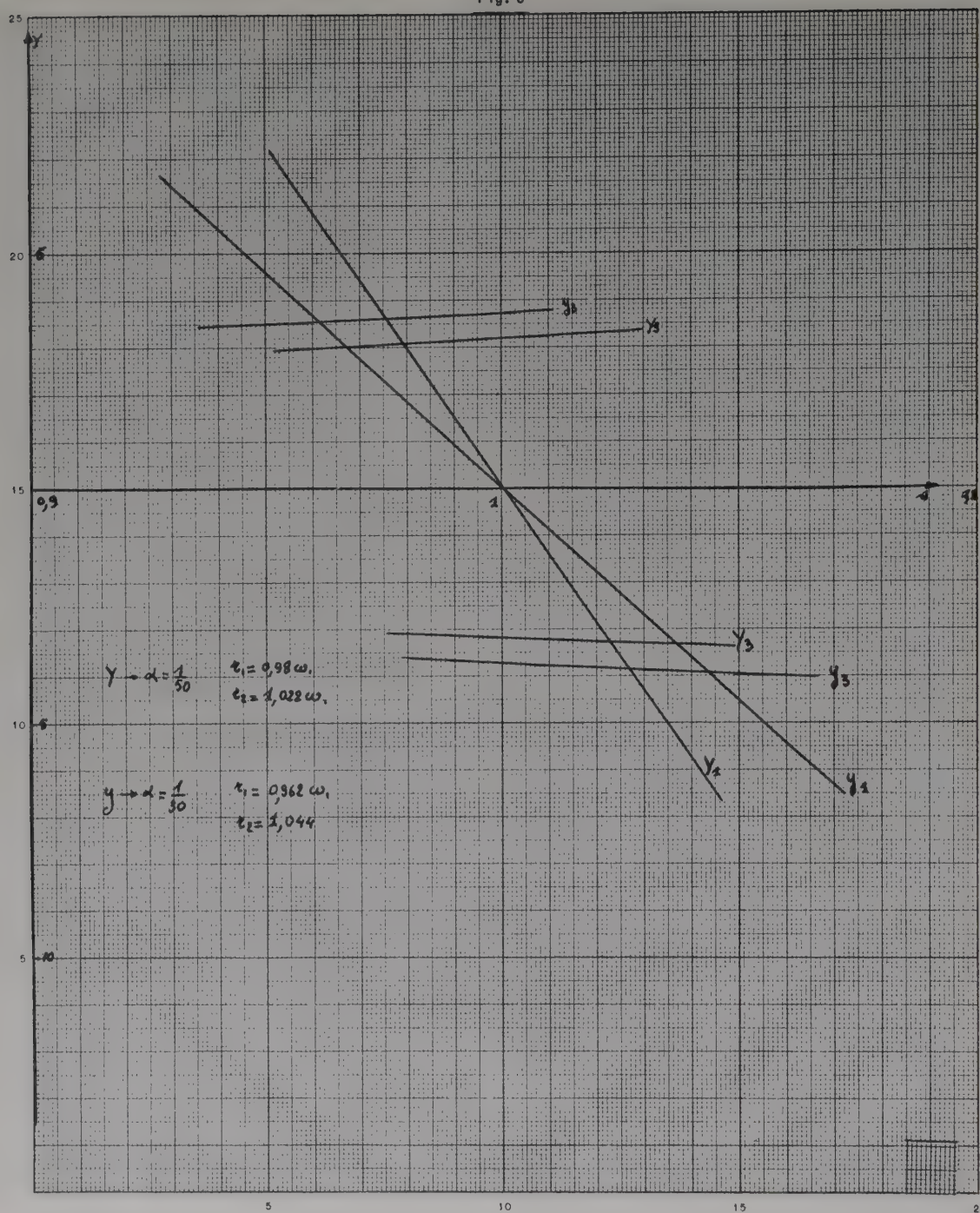


Fig. 7

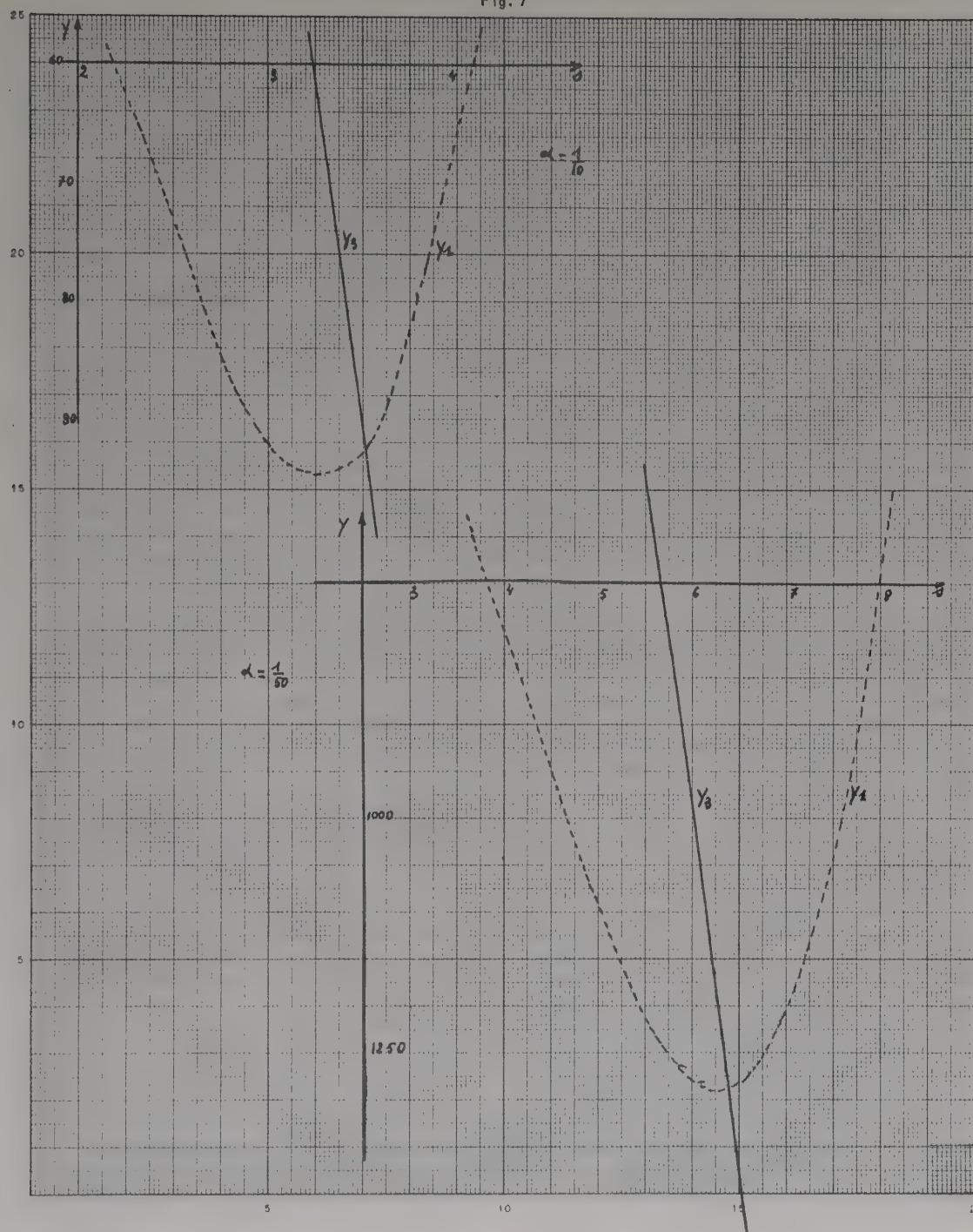


Fig. 8

LES PAPIERS CANSON - FRANCE

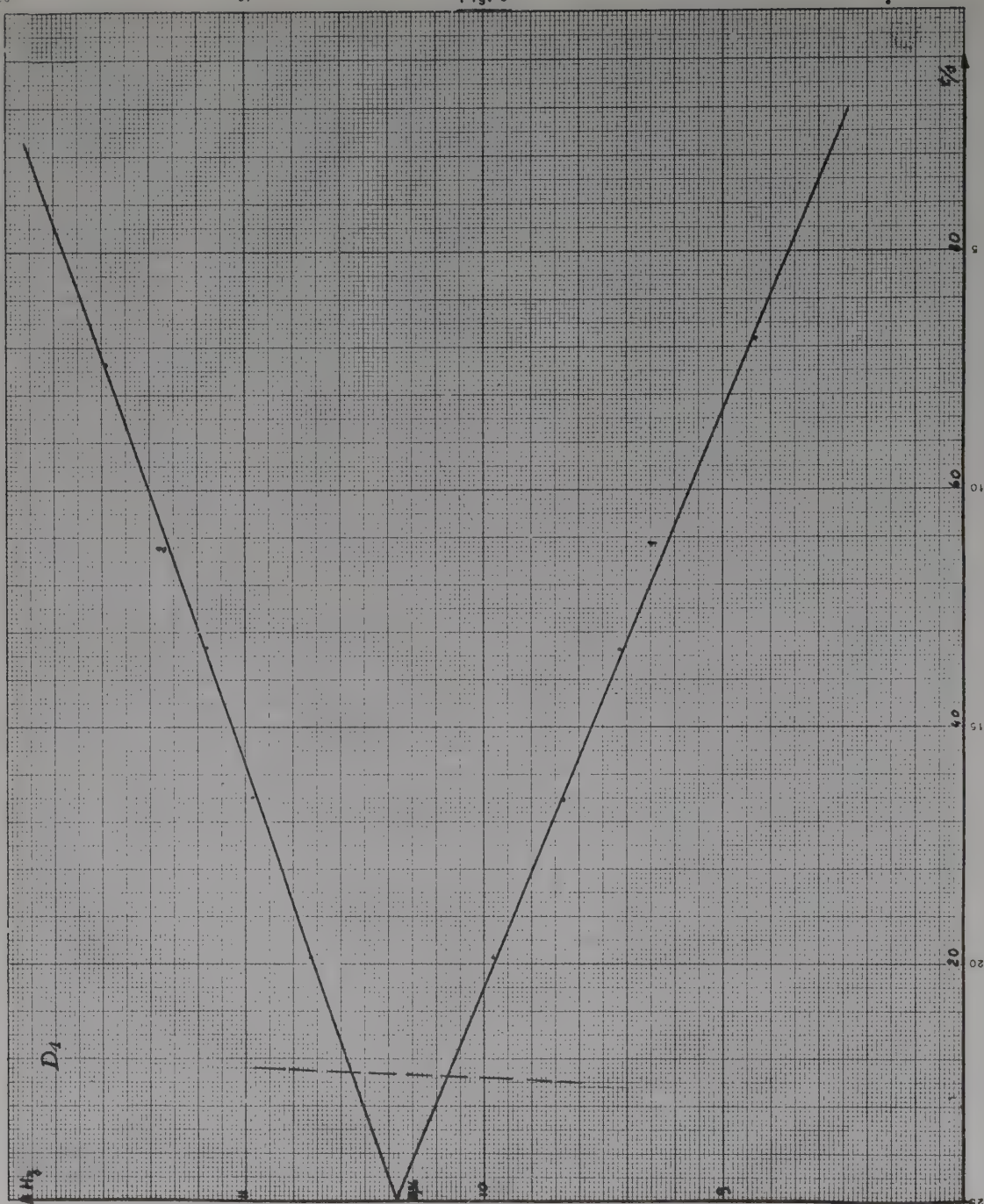


Fig. 9

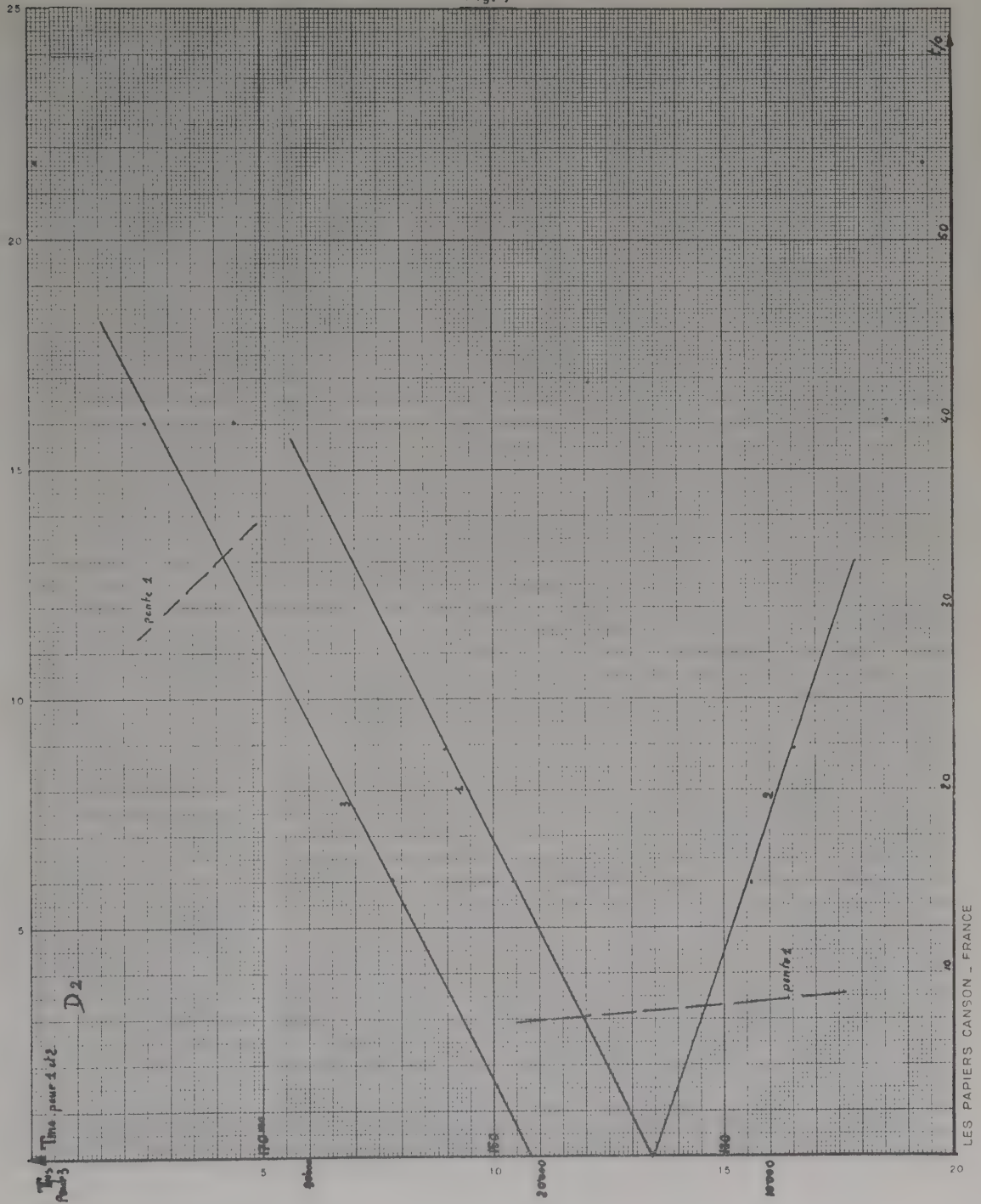


Fig. 10

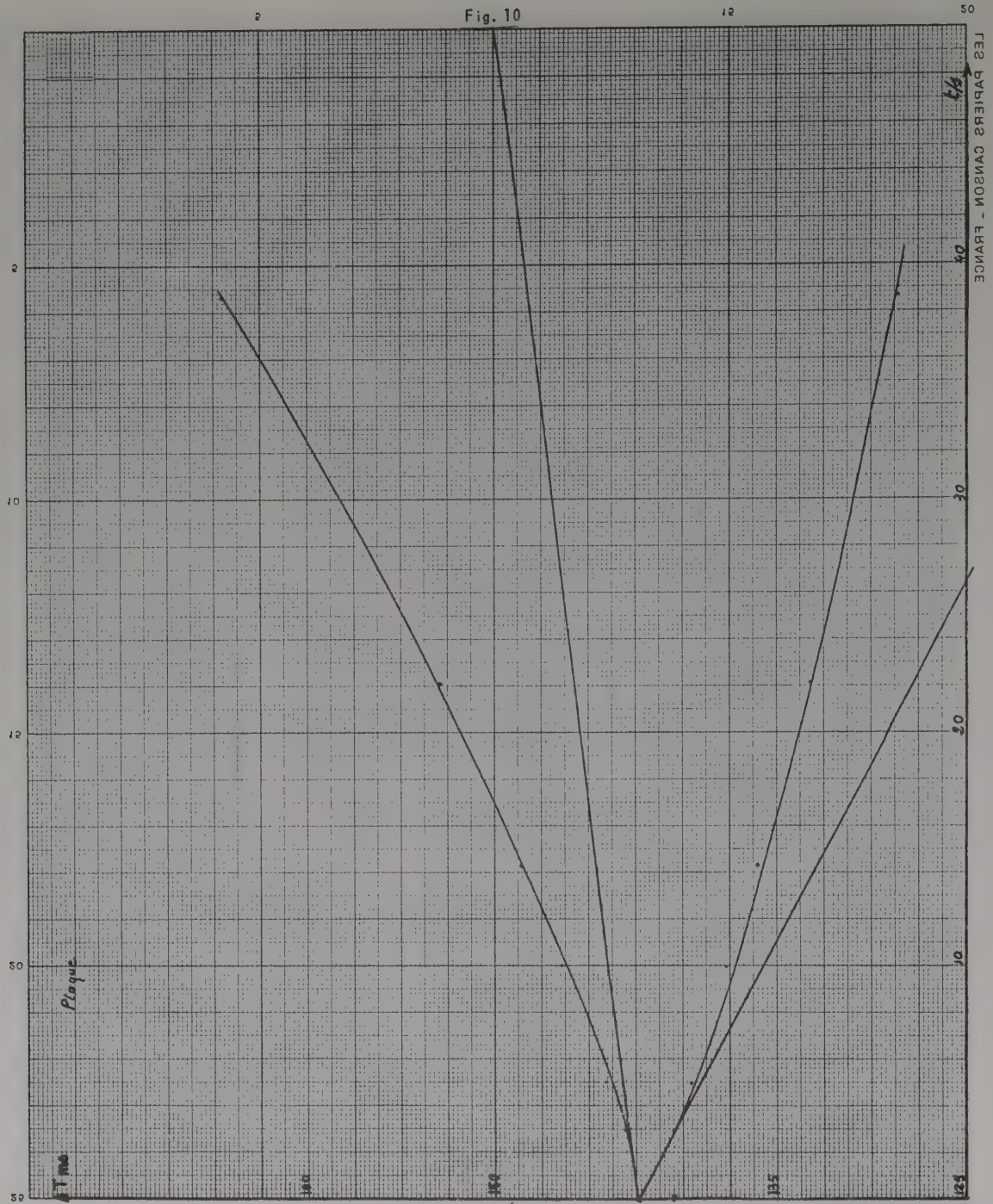


Fig. 11

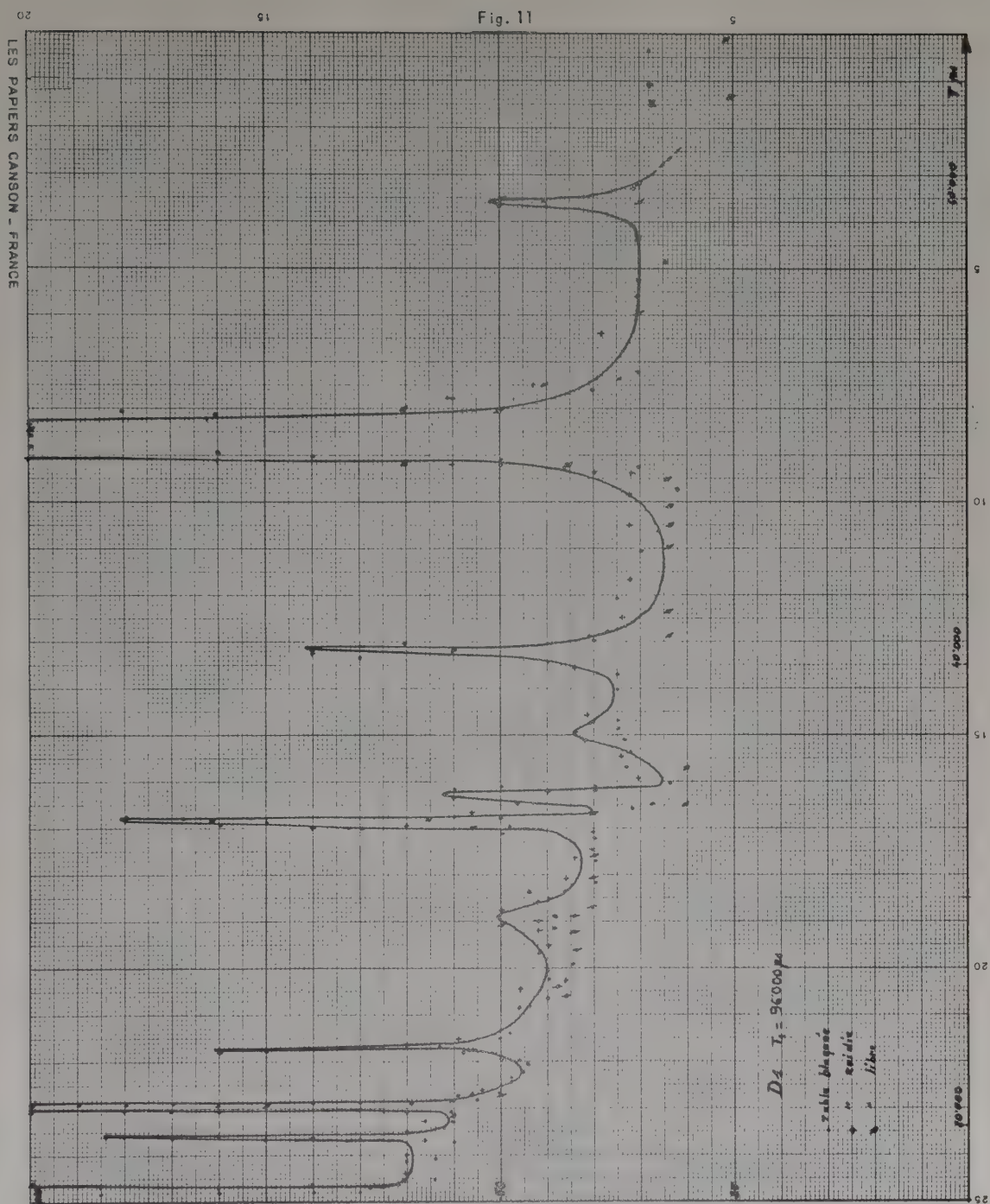
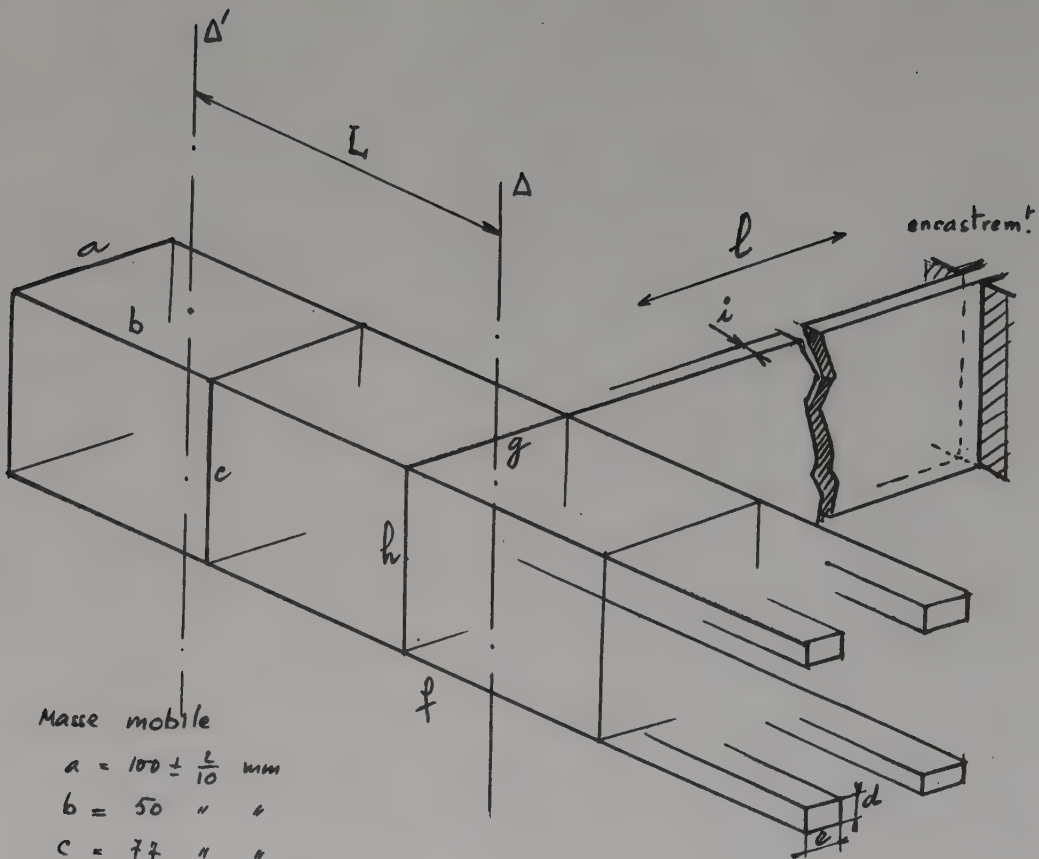


Fig. 12



Masse mobile

$$a = 100 \pm \frac{2}{10} \text{ mm}$$

$$b = 50 \text{ " "}$$

$$c = 77 \text{ " "}$$

Système support

$$d = 5 \pm 0,05 \text{ mm}$$

$$e = 30 \pm 0,2 \text{ mm}$$

$$f = 1,55 \pm 1 \text{ mm}$$

$$g = 94 \pm 1 \text{ "}$$

$$h = 76 \pm 0,5 \text{ "}$$

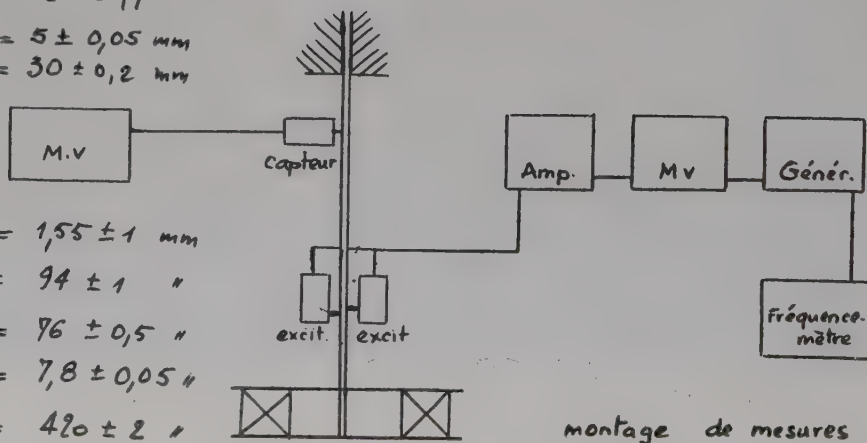
$$i = 7,8 \pm 0,05 \text{ "}$$

$$l = 420 \pm 2 \text{ "}$$

$$L = \text{variable}$$

$$\rho = 7,8 \pm 0,04 \text{ kg/dm}^3$$

$$E = 20.000 \pm 500 \text{ kg/mm}^2$$



montage de mesures

Fig. 13

Schéma 1

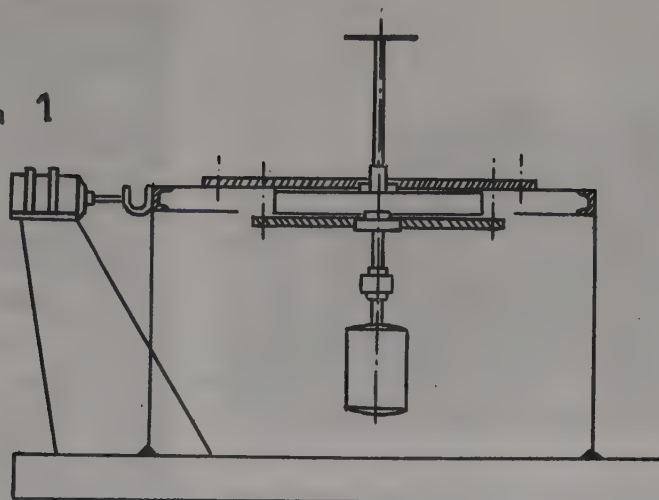


Schéma 2

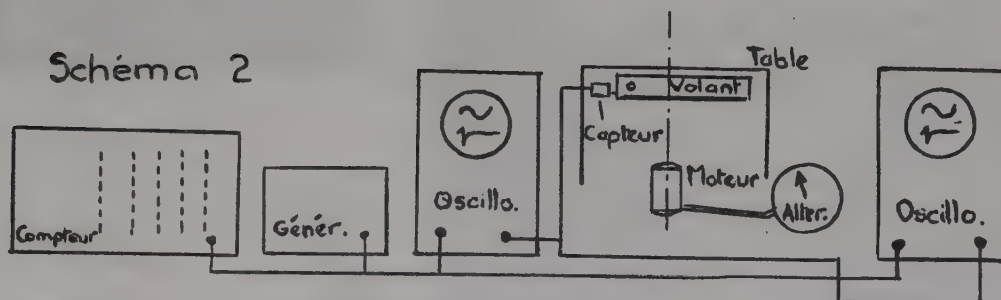


Schéma 3

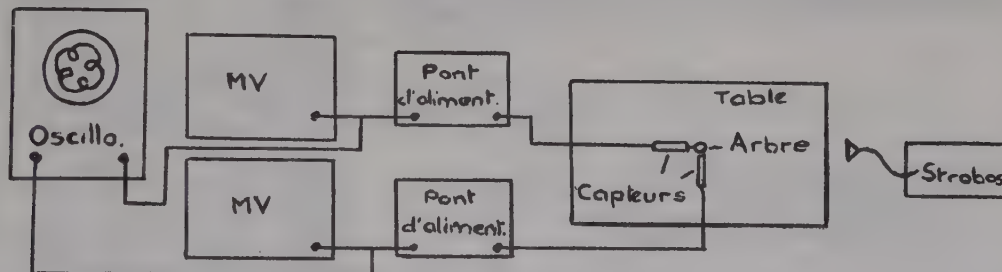
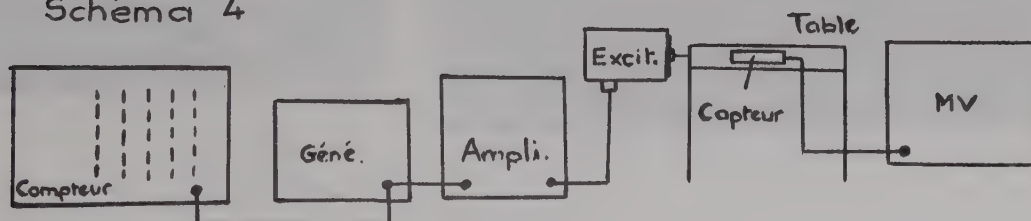
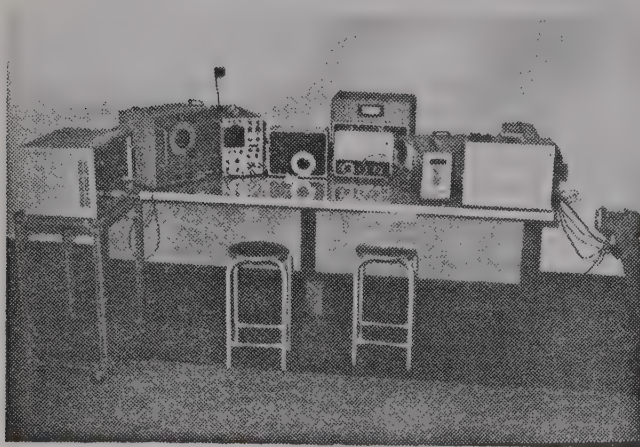
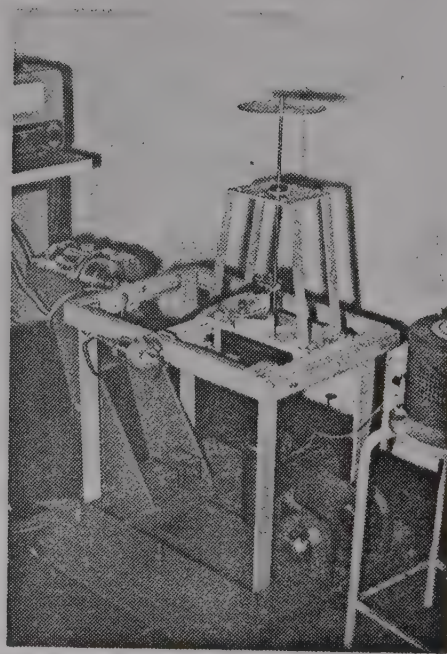
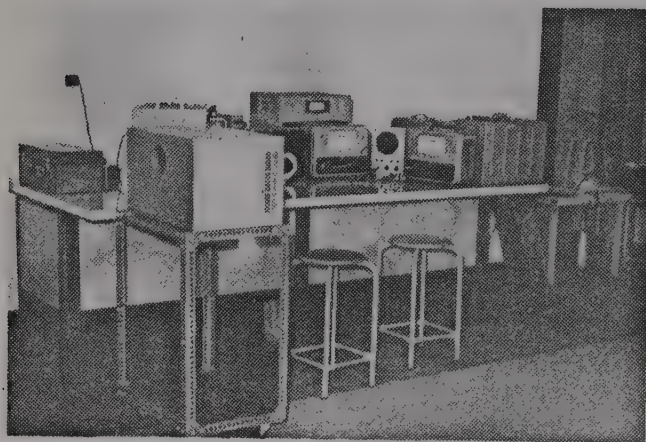
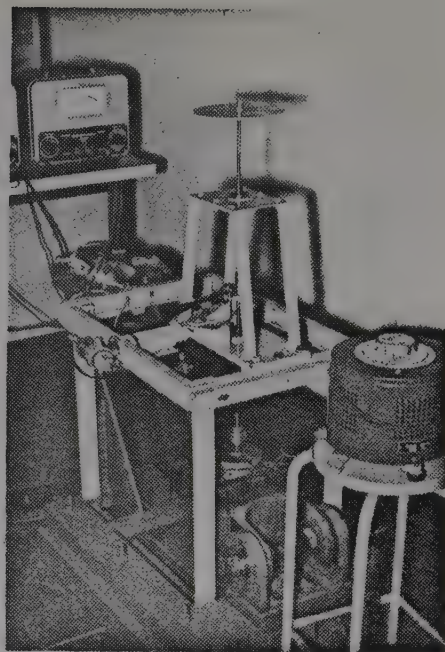
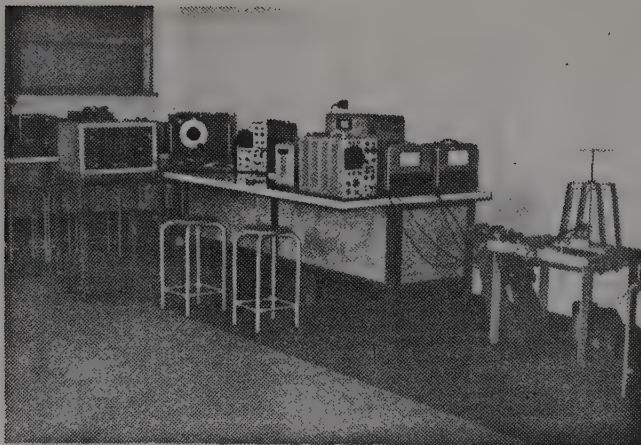


Schéma 4





BIBLIOGRAPHIE

- | | |
|--------------------------|---|
| P.J. BROSENS | S H Crandall " Whirling of Unsymmetrical Rotors "
Transactions of the A S M E Sept. 1961. ' |
| P.J. BROSENS | S H Crandall " On the stability of Rotation of a rotor
with the rotationaly un symetric Inertia and Stiffness properties"
Journal of Applied Mechanic Décembre 1961 |
| DEN HARTOG | " Mechanical Vibrations "
Fourth Edition Mac Grow Hill Book Compagny |
| O. PINKUS | "Varieties of Shaft Disturbance "
Transactions of the A S M E July 1966. |
| Y. PIRONNEAU | " Calcul des fréquences propres des systèmes en chaine
simple "
Annales E.N.S.M. 1961-62 |
| Y. PIRONNEAU | " Effet gyroscopique et Instabilité des rotors "
Annales E.N.S.M. 1963-64 |
| Y.PIRONNEAU - P.DOSGHEAS | " Etude expérimentale du fouettement des arbres "
Annales E.N.S.M. 1961-62 |
| Y. ROCARD | " Dynamique Générale des Vibrations "
Masson et Compagnie Editeurs |
| TOSHIO YAMAMOTO | " On critical Speed of shaft supported by a ball bearing "
Transaction of the A S M E June 1959 |

Deuxième Thèse

Propositions données par la Faculté :

ETUDE DE QUELQUES SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES
DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS FONCTIONS DU TEMPS

VU:

Le Directeur de la Thèse

Président du Jury :

Y. PIRONNEAU

VU ET APPROUVE

Le Doyen de la Faculté des Sciences :

G. BRILLOUET

VU ET PERMIS D'IMPRIMER

Nantes, le 4 mai 1964

Le Recteur de l'Académie de Nantes :

M. SCHMITT

Composition et Impression réalisées par

L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE DE NANTES

3, rue Maréchal Joffre - NANTES -

